BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVII (XXI)

Fasc. 1–2

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1971

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. FĂRCAȘ
Prof. ing. G. d'ALBON
Conf. ing. CR. LINDE

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. ALFRED BRAIER (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2 1971

Secţia IV

MECANICĂ TEHNICĂ

S U M A R

Pag.

D. MANGERON şi FLORIN POTERAŞU, Studiul problemelor inginereşti prin metoda programării dinamice. (I). Probleme liniare privitoare la teoria grinzilor subţiri (engl., rez. rom.) . . . 1

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU şi I. IBĂNESCU, Asupra mişcărilor impulsive ale sistemelor mecanice neolonome constituite din solide rigide (franc., rez. rom.) 5

ALFRED BRAIER, Răspunsul frecvenţial al sistemelor de ordinul întîi la intrări modulate în amplitudine. (II). Intrări cu modulaţie liniară (engl., rez. rom.) 13

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC şi M. STANCU, Asupra dinamicii solidului cu masă variabilă. (II). Teoreme generale (franc., rez. rom.) 19

SEIICHIRO MAEZAWA (Japonia), Stabilitatea oscilaţiilor forţate în sistemele liniare pe porţiuni, nesimetrice (engl., rez. rom.) . . 27

A. FAVRE, J. GAVIGLIO şi H. BURNAGE (Franţa), Dezvoltarea tranziţiei în urma unui cilindru perpendicular pe o curgere supersonică (franc., rez. rom.) 54

I. CURIEVICI şi HORIA DINULESCU, Transferul de căldură la suspensii gaz—solid în curgere prin tuburi (engl., rez. rom.) . . 61

GH. F. ONCESCU, Mărimi dinamice de cuplare utilizate drept comutatori laterali şi centrali în sistemele de acţionare (germ., rez. rom.) 71

OCTAVIAN MUNTEANU, GH. ILIESCU, CORNELIU DRĂGAN, I. SIMIONESCU şi C. DUCA, Consideraţii asupra utilizării unui traductor de inducţie, de tip rotativ, pentru înscrierea diagramelor de variaţie a vitezelor şi acceleraţiilor pe ecranul osciloscopului catodic (rom., rez. germ.) 83

C. DUCA, Studiul mecanismelor planetare prin metoda grupelor cinematice (rom., rez. engl.) 87

I. SIMIONESCU, Metodă generală pentru determinarea reacţiunilor din cuplele cinematice ale mecanismelor plane (rom., rez. engl.) 97

N. G. POPINCEANU şi L. T. HOSTIUC, Particularităţi ale comportării rulmenţilor cu mişcare oscilantă (franc., rez. rom.) . . 101

MARCEL GUTMAN, Unele precizări privind evacuarea în regim supracritic la motoarele în doi timpi (engl., rez. rom.) . . 119

EMIL GAIGINSCHI, AURELIAN SIMIONESCU, AL. ŞTIURCĂ şi CONDRAT-ADRIAN HOMUTESCU, Traductoare de deplasare pentru studiul experimental al sistemelor de injecţie de pe motoare cu aprindere prin compresiune (engl., rez. rom.) . . 127

GH. CAŞLER, VITALIE BELOUS, N. GOJINEŢCHI, BORIS PLĂHTEANU, MIRCEA COZMÎNCA, V. LUPUŞOR, P. BRÎNZĂ, GH. ZMEU, GH. COJOCARU şi MIHĂIŢĂ STAN, Un nou tip de maşină semiautomată de ascuţit burghie elicoidale prin procedeul cilindro-eliptic (rom., rez. franc.) 135

AUREL RĂILEANU, N. GOJINEŢCHI şi EMIL UNCHEŞEL, Determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune şi a forţei axiale la burghierea unor materiale nemetalice folosite în R. S. România (rom., rez. franc.) . . . 141

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tom XVII (XXI), Fasc. 1—2 1971

Section IV

APPLIED MECHANICS

CONTENTS

Pag.

D. MANGERON and FLORIN POTERAȘU, Engineering Problems Studies Using the Dynamic Programming Approach. (I). Linear Problems Concerning the Thin Beam Theory (English, Romanian summary) 1

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU et I. IBĂNESCU, Sur les mouvements impulsifs des systèmes mécaniques nonholonomes, ayant des solides rigides comme éléments constitutifs (French, Romanian summary) 5

ALFRED BRAIER, Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs. (II). Linear Modulated Inputs (English, Romanian summary) 13

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC et M. STANCU. Sur la dynamique du solide dont la masse est variable. (II). Théorèmes généraux (French, Romanian summary) 19

SEIICHIRO MAEZAWA (Japan), Stability of Forced Vibration in Unsymmetrical Piecewise-Linear System (English, Romanian summary) 27

A. FAVRE, J. GAVIGLIO et H. BURNAGE (France), Développement de la transition dans le sillage d'un cylindre perpendiculaire à un écoulement supersonique (French, Romanian summary) . . 45

I. CURIEVICI and HORIA DINULESCU, Local Heat Transfer by Flowing Gas—Solids Suspensions in Tubes (English, Romanian summary) 61

GH. F. ONCESCU, Dynamische Kupplungsgrössen als Seitliche und Zentrale Kommutatoren in Triebsystemen (German, Romanian summary) 71

Pag.

OCTAVIAN MUNTEANU, GH. ILIESCU, CORNELIU DRĂGAN, I. SIMIONESCU und C. DUCA, Über die Anwendung eines Induktiven Drehübersetzers der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramen (Romanian, German summary) 83

C. DUCA, The Study of Planetary Gear by the Method of Kinematic Groups (Romanian, English summary) 87

I. SIMIONESCU, A General Method to Calculate the Reactions in Kinematic Couplings of Plane Mechanisms (Romanian, English summary) 97

N. G. POPINCEANU et L. T. HOSTIUC, Particularités concernant le comportement des roulements à mouvement oscillatoire (French, Romanian summary) 101

MARCEL GUTMAN, Some Rafinements Regarding Exhaust in Supercritical Regime in Two-Stroke Engines (English, Romanian summary) 119

EMIL GAIGINSCHI, AURELIAN SIMIONESCU, AL. ȘTIURCĂ and CONDRAT-ADRIAN HOMUTESCU, Displacement Transducers for Studying the Injection Systems of Compression Ignition Engines (English, Romanian summary) 127

GH. CAȘLER, VITALIE BELOUS, N. GOJINEȚCHI, BORIS PLĂHTEANU, MIRCEA COZMÎNCĂ, V. LUPUȘOR, P. BRÎNZĂ, GH. ZMEU, GH. COJOCARU et MIHĂIȚĂ STAN, Un nouveau type de machine semi-automatique à affûter les forets hélicoïdaux selon le procédé cylindro-elliptique (Romanian, French summary) 135

AUREL RĂILEANU, N. GOJINEȚCHI et EMIL UNCHEȘEL, Détermination des paramètres des forces de coupe et des moments concernant certains matériaux non métalliques, soumis au perçage (Romanian, French summary) 141

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XVII (XXI), вып. 1—2 1971

Секция IV

ТЕХНИЧСКАЯ МЕХАНИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Д. МАНЖЕРОН и ФЛОРИН ПОТЕРАШУ, Динамическое программирование инженерных проблем. (I). Линейные задачи теории тонких балок. (англ., рез. рум.) 1

Н. ИРИМИЧУК, ЕЛИСАБЕТА РУСУ и И. ИВЭНЭСКУ, Об импульсивных движениях неголономных механических систем состоящих твёрдых жестких тел (франц., рез. рум.) 5

АЛФРЕД БРАЙЕР, Фреквенциальный ответ систем первого порядка на модулирование по амплитуде входы (II) (англ., рез. рум.) . . . 13

СПИРИДОН ДЕЛЯНУ, Н. ИРИМИЧУК и М. СТАНКУ, О динамике твёрдого тела переменной массы. (II). Общие теоремы (франц., рез. рум.) 19

СЕИИКИРО МАЕЗАВА (Япония), Устойчивости вныужденных колебаний в линейных несимметричных системах (англ., рез. рум.) . . . 27

А. ФАВР, Ж. ГАВИЛЬО и Г. БЮРНАС (Франция), Развитие переходного процесса в следе цилиндра перпендикулярного к сверхзвуковому течению (франц., рез. рум.) 45

И. КУРИЕВИЧ и ХОРЯ ДИНУЛЕСКУ, Местный теплообмен в трубах с газотвёрдыми суспенсиями (англ., рез. рум.) 61

Г. Ф. ОНЧЕСКУ, Динамические величины сцепления использующиеся как побочные и центральные коммутаторы в системах команд (нем., рез. рум.) 71

ОКТАВЯН МУНТЯНУ, Г. ИЛИЕСКУ, КОРНЕЛИУ ДРЭГАН, И. СИМИОНЕСКУ и К. ДУКА, Об использовании одного индуктивного датчика ротационного типа для записи на экране осциллографа вариационных диаграмм, скоростей и ускорений (рум., рез. нем.) 83

Стр.

К. ДУКА, Изучение планетарных механизмов методом кинематических групп (рум., рез. англ.) 87

И. СИМИОНЕСКУ, Общий метод для определения противодействий в кинематических парах плоских механизмов (рум., рез. англ.) . . . 97

Н. Г. ПОПИНЧАНУ и Л. Т. ХОСТЮК, Особенности поведения подшипников при движении качением (франц., рез. рум.) 101

МАРЧЕЛ ГУТМАН, Некоторые уточнения относительно выпуска газов в сверхкритическом режиме двухтактных двигателей (англ., рез. рум.) 119

ЕМИЛ ГАЙДЖИНСКИЙ, АУРЕЛИАН СИМИОНЕСКУ, АЛ. ШТЮРКЭ, КОНДРАТ-АДРИАН ГОМУТЕСКУ, Датчики перемещения для экспериментального исследования топливной аппаратуры дизелей (англ., рез. рум.) 127

Г. КАШЛЕР, ВИТАЛИЕ БЕЛОУС, Н. ГОЖИНЕЦКИЙ, БОРИС ПЛЭХТЯНУ, МИРЧЯ КОЗМЫНКЭ, В. ЛУПУШОР, П. БРЫНЗЭ, Г. ЗМЕУ, Г. КОЖОКАРУ и МИХЭИЦЭ СТАН, Новый полуавтоматический станок для цилиндро-эллиптической заточки винтовых сверл (рум., рез. франц.) 135

АУРЕЛ РЭИЛЯНУ, Н. ГОЖИНЕЦКИЙ и ЕМИЛ УНКЕШЕЛ, Определение параметров сил резания и крутящих моментов в процессе сверления нескольких неметаллических материалов использованных в Румынии (рум., рез. франц.) 141

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 539.31

ENGINEERING PROBLEMS STUDIES USING THE DYNAMIC PROGRAMMING APPROACH

I. LINEAR PROBLEMS CONCERNING THE THIN BEAM THEORY

BY

D. MANGERON and FLORIN POTERAȘU

To M. N. OĞUZTÖRELI on his first jubilee year

1. Continuing the successfully use of the Dynamic Programming approach worked out by the first of the authors in collaboration with M. N. Oğuztöreli in studies of the various polyvibrating systems [1]...[4], one obtains here solutions of linear problems concerning the thin beam theory.

2. Let, for instance,

$$\mathcal{J}[w] = \int_0^{L_1} \left[\frac{1}{2} \left(E\mathcal{J} w''^2 + k\, w^2 + S w'' w \right) - q w \right] \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

be the potential energy of deformation of an homogeneous stright wall-beam with a constant cross-section and sitting on an elastic winklerian medium, where $w = w(x)$, $0 \leqslant x \leqslant L_1$ is its transversal displacement, k, E, and $\mathcal{J}$ have the classical meanings, q is an uniform distributed transversal load, and S is a compression force, while

$$w(L_1) = \alpha, \quad w(0) = 0, \quad w'(L_1) = \beta, \quad w'(0) = 0 \tag{2.2}$$

are the boundary conditions taken into account.

Following and extending the set of H. Kagiwada, R. Kalaba, Y. Thomas, D. Alspaugh, P. Kirmser recent papers [5] ... [10], the new approach to the formulated problem consists in considering

the potential energy of deformation corresponding to the configuration of equilibrium as a function depending on α, β, and L, $f(\alpha, \beta, L) = \min \mathcal{J}[w]$.

The subsequent application of the R. Bellman's principle of optimality yields

$$f(\alpha, \beta, L + \Delta) = \min_u \left\{ \left[\frac{1}{2} (E\mathcal{J}u^2 + k\alpha^2 + S\alpha u) - q\alpha \right] \Delta + \right. \tag{2.3}$$

$$\left. + f(\alpha - \beta\Delta, \beta - u\Delta, L) + o(\Delta) \right\},$$

where the chosen variable $u = w''|_{L+\Delta}$. Followingly, f satisfies the *initial value problem*

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \min_u \left[\frac{1}{2} (E\mathcal{J}u^2 + k\alpha^2 + S\alpha u) - q\alpha - \beta \frac{\partial f}{\partial \alpha} - u \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] \tag{2.4}$$

and

$$f(\alpha, \beta, 0) = 0. \tag{2.5}$$

Because

$$u_{\min} = \frac{1}{E\mathcal{J}} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{2} S\alpha \right), \tag{2.6}$$

one obtains the non linear partial differential system (2.5) and

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \left[\frac{1}{2E\mathcal{J}} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{2} S\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} k\alpha^2 + \frac{1}{2} \frac{S\alpha}{E\mathcal{J}} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{2} S\alpha \right) - \right. \tag{2.7}$$

$$\left. - q\alpha - \beta \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{1}{2} S\alpha \right) \frac{1}{E\mathcal{J}} \right].$$

Taking into account the linearity of the Euler equation corresponding to the system (2.1), (2.2), f is necessarily a quadratic function on α and β,

$$f(\alpha, \beta, L) \equiv q_{11}(L)\,\alpha^2 + q_{12}(L)\,\alpha\beta + q_{22}(L)\,\beta^2 + q_1(L)\,\alpha + q_2(L)\,\beta + q_3(L) \tag{2.8}$$

and, consequently, one obtains the following ordinary differential system

$$
(2.9)\quad \begin{cases}
q_{11}' = -\dfrac{1}{2EJ}q_{12}^2 + \dfrac{S}{2EJ}q_{12} + \dfrac{k}{2} - \dfrac{S^2}{8EJ}, & q_{11}(0) = 0 \\
q_{12}' = -\dfrac{2}{EJ}q_{12}q_{22} + \dfrac{S}{EJ}q_{22} - 2q_{11}, & q_{12}(0) = 0, \\
q_{22}' = -\dfrac{2}{EJ}q_{22}^2 - q_{12}, & q_{22}(0) = 0, \\
q_1' = -\dfrac{1}{EJ}q_2 q_{12} + \dfrac{S}{2EJ}q_2 - q_1, & q_1(0) = 0, \\
q_2' = -\dfrac{2}{EJ}q_2 q_{22} - q_1, & q_2(0) = 0, \\
q_3' = -\dfrac{2}{2EJ}q_2^2, & q_3(0) = 0.
\end{cases}
$$

3. In one of our papers to appear are given solutions of the system (2.9) obtained both using a digital as well as an analog computers.

Finally, we underline here the instability of the considered system for a certain value of S. The smallest value of S gives the *critical buckling force.*

Received November 28, 1970

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Mangeron D., *Problèmes concernant les systèmes polyvibrants.* C.r. Acad. Sci., Paris, **266**, 870–873; 976–979; 1050–1053; 1103–1106; 1121–1124 (1968), and J. Math. Anal. a. Appl., **9**, *1*, 141–146 (1964).

2. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Studies Concerning the Polyvibrating Systems.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (in print).

3. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Problèmes concernant les équations polyvibrantes généralisées.* C.r. Acad. Sci., Paris, **270**, 37–40 (1970), and Bull. Acad. R. Sci. Belgique, 5e s., **LVI**, 30–37; 267–274 (1970).

4. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Sistemi polivibranti generalizzati ed applicazioni.* Rend. Acad, Naz. dei Lincei (to appear).

5. Alspaugh D., Kagiwada H., Kalaba R., *Dynamic Programming, Invariant Imbedding and Thin Beam Theory.* Int. J. Engng. Sci., **7**, 1117–1126 (1969).

6. Kirmser P. G., *Invariant Imbedding Applied to the Calculation of Beam Deflections.* Kansas State University Report, 1969.

7. Kagiwada H., Kalaba R., Thomas Y., *Exact Solution of Pontryagin's Equations of Optimal Control.* Part I, J. of Optimization Theory and Appl., **5**, *1*, 12—22 (1970).

8. Alspaugh D., Kagiwada H., Kalaba R., *Application of Invariant Imbedding to the Buckling of Columns.* J. Comput. Phys., **5**, *1*, 56–69 (1970).
9. Kagiwada H., Kalaba R., Schumitzky A., Sridhar R., *Cauchy and Fredholm Methods for Euler Equations.* J. of Optimization Theory and Appl., **2**, *3* (1968).
10. Kalaba R., *Dynamic Programming and the Variational Principles of Classical Mechanics.* Developments in Mechanics, Vol. **1**, Michigan State University, 1–10 (1968).

STUDIUL PROBLEMELOR INGINEREȘTI PRIN METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

I. Probleme liniare privitoare la teoria grinzilor subțiri

(Rezumat)

Continuînd ordinea de idei inițiată de primul dintre autori cu ocazia studiilor sistemelor polivibrante, introduse de el în știință și tehnică prin metoda programării dinamice [1] ... [4], autorii obțin în această Notă modele matematice ale problemelor inginerești privitoare la teoria grinzilor subțiri. Noutatea rezultatelor obținute constă între altele în faptul că aplicarea programării dinamice permite traducerea problemelor de contur formulate în probleme echivalente de valori inițiale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.D. 531.66

SUR LES MOUVEMENTS IMPULSIFS DES SYSTÈMES MÉCANIQUES NONHOLONOMES, AYANT DES SOLIDES RIGIDES COMME ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS

PAR

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU et I. IBĂNESCU

Introduction

Un ample étude sur les mouvements impulsifs des systèmes mécaniques nonholonomes, utilisant les équations de la mécanique analytique, a été effectué en 1967, par Iu. I. Neimark et N. A. Fufaev dans leur livre intitulé *La dinamique des systèmes nonholonomes* [6]. Toutefois, la forme de présentation du problème, fondée sur l'acceptation du modèle mécanique newtonien de point matériel comme élément constitutif du système, est susceptibile de critiques, parmi lesquelles en peut mentionner les suivantes:

1° Les équations établies pour des systèmes de points matériels s'appliquent en réalité, dans la pratique, aux systèmes mécaniques ayant des solides rigides comme éléments constitutifs et il n'est pas permis de considérer, sans une justification préalable, que la forme extérieure des équations des mouvements soit la même dans les deux situations distinctes.

2° Les grandeurs physiques qui figurent dans les équations déduites ont d'autres expressions de calcul dans les deux situations mentionnées.

Dans la Note présente les auteurs se proposent d'éliminer les inconvénients signalés ci-dessus, toute en remplaçant, dans l'établissement des équations des mouvements impulsifs des systèmes nonholonomes, le point matériel newtonien par le solide rigide comme modèle mécanique.

I. Calculs préliminaires

Le système mécanique est considéré formé d'un nombre de n solides rigides (S_ν) $(\nu = 1,2,\ldots n)$, dont les positions par rapport à un repère fixe

commun, $Ox_1 x_2 x_3$, sont déterminées par les coordonnées $x_{G_\sigma}(\sigma = 1, 2, 3)$ des centres de masse G_ν, pris comme pôles invariablement liés aux solides respectifs et par les trois angles d'Euler, $\theta_{\nu e}$, ($e = p, r, n$ — précession, rotation propre et nutation). Les axes $G_\nu x'^{(\nu)}_\sigma$ attachées aux solides sont considérées axes centrales d'inertie, l'expression de l'énergie cinétique d'un solide quelconque ayant donc la forme simplifiée:

$$E_\nu = \frac{1}{2}[M_\nu v^2_{G_\nu} + \mathcal{J}^{(\nu)}_j \omega^2_{\nu j}], \qquad (j = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \ldots n). \tag{I.1}$$

Le système, dont le nombre total de paramètres de position est:

$$N = \sum_\nu p_\nu \leqslant 6n, \tag{I.2}$$

où $p_\nu \leqslant 6$ est le nombre de paramètres de position du solides (S_ν), est soumis aux liaisons holonomes, exprimées par un nombre de r équations finies ayant la forme générale:

$$f_\rho(\ldots x_{G_{\nu 1}}, x_{G_{\nu 2}}, x_{G_{\nu 3}}, \theta_{\nu p}, \theta_{\nu r}, \theta_{\nu n}, \ldots; t) = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{I.3}$$

qui permettront de choisir les $p = N - r$ coordonnées généralisées du système, $q_1, \ldots, q_p$, en écrivant:

$$\begin{cases} x_{G_{\nu\sigma}} = x_{G_{\nu\sigma}}(q_1, \ldots, q_p; t), & (\sigma = 1, 2, 3), \\ \theta_{\nu e} = \theta_{\nu e}(q_1, \ldots, q_p; t), & (e = p, r, n) \end{cases} \tag{I.4}$$

avec:

$$\begin{cases} \dot{x}_{G_{\nu\sigma}} = \dfrac{\partial x_{G_{\nu\sigma}}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \dfrac{\partial x_{G_{\nu\sigma}}}{\partial t}, & (\sigma = 1, 2, 3; \quad e = p, r, n) \\ \dot{\theta}_{\nu e} = \dfrac{\partial \theta_{\nu e}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \dfrac{\partial \theta_{\nu e}}{\partial t}, & (j = 1, 2, \ldots, p; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{I.5}$$

et aussi aux liaisons nonholonomes, de mobilité linéaire, exprimées par un nombre de l équations nonintégrable de la forme:

$$\begin{cases} \varphi_\lambda(\ldots x_{G_{\nu\sigma}}, \theta_{\nu e}, \dot{x}_{G_{\nu\sigma}}, \dot{\theta}_{\nu s}, \ldots; t) = \alpha^\lambda_{ij}\dot{x}_{G_{ij}} + \alpha^\lambda_{ie}\dot{\theta}_{ie} + \alpha^\lambda_0 = 0, \\ (i = 1, 2 \ldots n;\ j = 1, 2, 3;\ e = p, r, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots, l), \end{cases} \tag{I.6}$$

qui réduisent à $m = p - l$ le nombre de degrés de liberté du système.

---

[1]) On adopte la convention d'indices muets, appliquée seulement aux indices latins e, h, i, j, k, l, p, r, s etc., qui se répètent à moins deux fois.

Tout en tenant compte de (I.5) et introduisant les notations:

$$b_{\lambda k} = \alpha_{ij}^{\lambda} \frac{\partial x_{G\,ij}}{\partial q_k} + \alpha_{ie}^{\lambda} \frac{\partial \theta_{ie}}{\partial q_k} = b_{\lambda k}(q,\ t) \tag{I.7}$$

et

$$b_{\lambda 0} = \alpha_{ij}^{\lambda} \frac{\partial x_{G\,ij}}{\partial t} + \alpha_{ie}^{\lambda} \frac{\partial \theta_{ie}}{\partial t} + \alpha_0^{\lambda} = b_{\lambda 0}\,(q,\ t), \tag{I.8}$$

on obtiendra pour les équations (I.6) la forme:

$$b_{\lambda k}\dot{q}_k + b_{\lambda 0} = 0, \qquad (k = 1,2,...,p;\ \lambda = 1,2\ ,...,l). \tag{I.9}$$

On ordonne ainsi les coordonnées généralisées, que les premières $m = p - l$ vitesses généralisées soit indépendantes. Alors le système (I.9) pourra être résolu par rapport aux dernières l vitesses:

$$\dot{q}_\lambda = c_{\lambda h}\dot{q}_h + c_{\lambda 0}, \qquad (h = 1,2,...,m;\ \lambda = m+1,...,p), \tag{I.10}$$

avec les expressions suivantes pour les différentielles $\mathrm{d}q_\lambda$:

$$\mathrm{d}q_\lambda = c_{\lambda h}\,\mathrm{d}q_h + c_{\lambda 0}\,\mathrm{d}t \tag{I.11}$$

et pour les déplacements virtuels dépendantes:

$$\delta q_\lambda = c_{\lambda h}\,\delta q_h, \qquad (h = 1,2,...,m;\ \lambda = m+1,...,p), \tag{I.12}$$

les coefficients $c_{\lambda h}$ et $c_{\lambda 0}$ étant, en général, fonctions de toutes les coordonnées généralisées et du temps.

Les relations (I.10) permettent maintenant d'exprimer l'énergie cinétique du système:

$$E = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_{i0}\dot{q}_i + \frac{1}{2} g_{00}, \qquad (i,j=1,2,...,p), \tag{I.13}$$

avec $g_{ij} = g_{ij}(q,\ t)$, $g_{i0} = g_{i0}(q,\ t)$ et $g_{00} = g_{00}(q,\ t)$, en fonction seulement des vitesses généralisées indépendantes:

$$E = \frac{1}{2} g_{hk}^{*}\dot{q}_h\dot{q}_k + g_{h0}^{*}\dot{q}_h + \frac{1}{2} g_{00}^{*} = E^{*}(q_1,...,q_p;\ \dot{q}_1,...,\dot{q}_m;t), \quad (h,k=1,2,...,m), \tag{I.14}$$

les nouveaux coefficients g_{hk}^{*}, g_{h0}^{*} et g_{00}^{*} ayant les significations:

$$g_{hk}^{*} = g_{hk} + g_{ls}c_{lh}c_{sk} + g_{hs}c_{sk} + g_{lk}c_{lh}, \tag{I.15}$$

$$g_{h0}^{*} = g_{h0} + g_{l0}c_{lh} + g_{hs}c_{s0} + g_{ls}c_{l0}c_{sh} \tag{I.16}$$

et

$$g_{00}^{*} = g_{00} + 2g_{l0}c_{l0} + g_{ls}c_{l0}c_{s0}, \qquad (l,\ s = m+1,...,p;\ h,\ k = 1,2,...,m). \tag{I.17}$$

On établit aussi les relations:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E^{\star}}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k - A_s \dot{c}_{sk}\,\delta q_k, \tag{I.18}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, m;\ s = m+1, \ldots, p),$$

où A_s signifie:

$$A_s = (g_{sh} + g_{sl}\,c_{lh})\,\dot{q}_h + g_{sl}\,c_{l0} + g_{s0}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ l, s = m+1, \ldots, p)$$

et:

$$\frac{\partial E}{\partial q_j}\,\delta q_j = \mathcal{R}_k\,\delta q_k, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, m), \tag{I.19}$$

où par $\mathcal{R}_k$ ont été notées les expressions:

$$\mathcal{R}_k = \frac{\partial E}{\partial q_k} + \frac{\partial E}{\partial q_s}\,c_{sk} = \mathcal{R}_k(q_1, \ldots, q_p;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p;\ t), \tag{I.20}$$

ayant les modules finis.

Tout en adoptant l'hypothèse — acceptable au point de vue expérimental à cause des aires de choc très petites — que les distributions des forces de percussion qui correspondent à chaque zone de choc, $A_{\nu\lambda}\,(\lambda = 1, 2, \ldots, l_\nu)$ sur la surface A_ν du solide (S_ν), sont équivalentes aux résultantes uniques, $\overline{F}_{p_{\nu\lambda}}$, appliquées dans les points théoriques, $C_{\nu\lambda}$, de choc, déterminés par les vecteurs $\overrightarrow{r_{C_{\nu\lambda}}} = \overrightarrow{G_\nu C_{\nu\lambda}}$, on écrira pour les composantes des torseurs, dans les centres de masse G_ν des forces de percussions, les expressions:

$$\overline{\mathcal{F}}_{p_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{l_\nu} \overline{F}_{p_{\nu\lambda}}, \qquad \overline{\mathcal{M}}_{p_{G_\nu}} = \sum_{\lambda=1}^{l_\nu} \overrightarrow{r_{C_{\nu\lambda}}} \times \overline{F}_{p_{\nu\lambda}}. \tag{I.21}$$

Par conséquence, l'expression du travail virtuel des forces de percussion prendra, en vertu des expressions (I.21) et des relations (I.12), la forme

$$\delta \mathcal{L}_p = Q^{*}_{p_k}\,\delta q_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{I.22}$$

où

$$Q^{*}_{p_k} = \sum_\nu \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_{p_\nu}\frac{\partial \overline{r}_{G_\nu}}{\partial q_k} + \overline{\mathcal{M}}_{p_{G_\nu}}\frac{\partial \overline{\theta}_r}{\partial q_k}\right) + \left(\overline{\mathcal{F}}_{p_\nu}\frac{\partial \overline{r}_{G_\nu}}{\partial q_s} + \overline{\mathcal{M}}_{p_{G_\nu}}\frac{\partial \overline{\theta}_\nu}{\partial q_s}\right)c_{sk}\right], \tag{I.23}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p;\ s = m+1, \ldots, p),$$

sont les forces généralisées percutantes qui correspondent aux variations indépendantes des coordonnées généralisées.

Une expression analogue peut être écrite pour le travail virtuel des forces actives agissantes sur le système mécanique considéré:

$$\delta\mathcal{L} = Q_k^* \delta q_k, \qquad (k = 1, 2, ..., m), \tag{I.24}$$

$$Q_k^* = \sum_\nu \left[\left(\overline{\mathcal{F}}_\nu \frac{\partial \overline{r}_{G_\nu}}{\partial q_k} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \frac{\partial \overline{\theta}_\nu}{\partial q_k} \right) + \left(\overline{\mathcal{F}}_\nu \frac{\partial \overline{r}_{G_\nu}}{\partial q_s} + \overline{\mathcal{M}}_{G_\nu} \frac{\partial \overline{\theta}_\nu}{\partial q_s} \right) c_{sk} \right] \tag{I.25}$$

étant les forces généralisées actives qui correspondent aux variations indépendantes des coordonnées généralisées et $\overline{\mathcal{F}}_\nu$ et $\overline{\mathcal{M}}_{G_\nu}$ étant les composantes des torseurs dans les centres de mase G_ν des forces actives agissantes sur les solides (S_ν).

II. Établissement des équations du mouvement

Les équations du mouvement du système mécanique considéré pour l'interval $\tau = t_1 - t_0$ des chocs seront établies dans les hypothèses suivantes [6]:

1° Le choc est pratiquement instantané, d'où en résulte les conséquences:

a) les coordonnées généralisées du système peuvent être considérées constantes dans l'interval du choc;

b) les intégrales des différentes fonctions de module fini qui caractérisent le mouvement du système, effectuées pour l'interval du choc, pourront être négligées dans les équations du mouvement.

2° Les liaisons appliquées au système, holonomes et nonholonomes, sont considérées idéales, c'est-à dire que le travail virtuel de leurs réactions est considéré nul.

3° Les percussions extérieures sont connues, c'est-à-dire sont connues les intégrales:

$$\overline{\mathcal{P}}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{l_\nu} \int_{t_0}^{t_1} \overline{F}_{p_{\nu\lambda}} dt = \sum_{\lambda=1}^{l_\nu} \overline{\mathcal{P}}_{\nu\lambda} \tag{II.1}$$

et

$$\overline{\mathcal{M}}_{G_\nu}(\overline{\mathcal{P}}_\nu) = \sum_{\lambda=1}^{l_\nu} \int_{t_0}^{t_1} \overline{r}'_{C\nu\lambda} \times (\overline{F}_{p_{\nu\lambda}} dt) = \sum_{\lambda=1}^{l_\nu} \overline{r}'_{c_{\nu\lambda}} \times \overline{\mathcal{P}}_{\nu\lambda}. \tag{II.2}$$

4° Les liaisons holonomes es nonholonomes appliquées avant le choc se maintiennent pendant la durée et après le choc. À l'instant initial du choc, on pourra appliquer aussi des liaisons nonholonomes suplimentaires, qui seront considérées suprimées à la fin du choc dans les percussions élastiques et maintenues après le choc, dans les percussions plastiques.

Pour établir les équations des mouvements impulsifs on considéra les mêmes situations comme dans (6):

1. *Le choc est l'effet des percussions extérieures connues et les liaisons nonholonomes se maintiennent continuellement.*

Tout en tenant compte des expressions (I.22) et (I.24) des travaux virtuels des forces de percussion et des forces actives qui agissent sur le système mécanique et en observant que pour le travail virtuel des forces d'inertie du sistème peut être écrite, en vertu des relations (I.18) et (I.19) (avec $c_{sk} = 0$, comme conséquence de la première hypothèse), l'expression:

$$\text{(II.3)} \qquad \delta\mathcal{L}^i = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E^*}{\partial \dot{q}_k}\right) - \mathcal{R}_k\right]\delta q_k, \qquad (k = 1, 2, ..., m),$$

il en résulte de l'équation générale de la dynamique, écrite dans ces conditions sous la forme:

$$\delta\mathcal{L}^i + \delta\mathcal{L}_p + \delta\mathcal{L} = 0,$$

le système d'équations

$$\text{(II.4)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right) - (\mathcal{R}_\mu + Q^*_\mu) = Q^*_{p_\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, ..., m).$$

L'intégration de ce système pendant la durée du choc, permetant d'écrire en vertu des hypothèses 1° et 3°:

(II.5)

$$\int_{t_0}^{t_1} Q^*_{p_\mu}\,\mathrm{d}t = \sum_\nu \left[\left(\bar{\mathcal{P}}_\nu \frac{\partial \bar{r}_{G_\nu}}{\partial q_\mu} + \bar{\mathcal{M}}_{G_\nu}(\bar{\mathcal{P}}_\nu)\frac{\partial \bar{\theta}_\nu}{\partial q_\mu}\right) + \left(\bar{\mathcal{P}}_\nu \frac{\partial \bar{r}_{G_\nu}}{\partial q_s} + \bar{\mathcal{M}}_{G_\nu}(\bar{\mathcal{P}}_\nu)\frac{\partial \bar{\theta}_\nu}{\partial q_s}\right) c_{s_\mu}\right] = \mathcal{H}^*_\mu,$$

conduit au système cherché d'équations:

$$\text{(II.6)} \qquad \left(\frac{\partial E^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right)_{t=t_1} - \left(\frac{\partial E^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right)_{t=t_0} = \mathcal{H}^*_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, ..., m),$$

qui avec le système

$$\text{(II.7)} \qquad (\dot{q}_\lambda)_{t=t_1} = (\dot{q}_\lambda)_{t=t_0} + c_{\lambda h}\left[(\dot{q}_\mu)_{t=t_1} - (\dot{q}_h)_{t=t_0}\right],$$
$$(h = 1, 2, ..., m;\ \lambda = m+1, ..., p),$$

résultant de la valabilité des équations (I.10) pour les moments extrêmes t_0 et t_1 du choc, permet de solutionner complètement le problème.

2. *Le choc est l'effet des percussions intérieures et les liaisons nonholonomes sont appliquées instantanément dans le moment initial du choc.*

Pendant la durée du choc l'équation générale de la dynamique prends la forme simplifiée :

$$\left\{-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]-\sum_{\nu}\left(\overline{\mathcal{F}}\frac{\partial \overline{r}_{G_\nu}}{\partial q_j}+\overline{\mathcal{M}}_{G_\nu}\frac{\partial \overline{\theta}_\nu}{\partial q_j}\right)\right\}\delta q_j=0, \tag{II.8}$$

$$(j=1,2,\ldots,p).$$

L'hypothèse 1° et les relations (I.12) (avec $\dot{c}_{sh}=0$) permettent d'écrire les expressions :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_h}+\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s}c_{sh}\right)\delta q_h, \tag{II.9}$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_j}\delta q_j=\left(\frac{\partial E}{\partial q_h}+\frac{\partial E}{\partial q_s}c_{sh}\right)\delta q_h \tag{II.10}$$

et

$$\sum_{\nu}\left(\overline{\mathcal{F}}_\nu\frac{\partial \overline{r}_{G_\nu}}{\partial q_j}+\overline{\mathcal{M}}_{G_\nu}\frac{\partial \overline{\theta}_\nu}{\partial q_j}\right)\delta q_j=(Q_h+Q_s c_{sh})\,\delta q_h, \tag{II.11}$$

$$(j=1,2,\ldots,p;\ h=1,2,\ldots,m;\ s=m+1,\ldots,p)$$

qui, introduites dans l'équation (II.8) conduisent au système d'équations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\mu}+\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s}c_{s\mu}\right)=\left(\frac{\partial E}{\partial q_\mu}+\frac{\partial E}{\partial q_s}c_{s\mu}\right)+(Q_\mu+Q_s c_{s\mu}), \tag{II.12}$$

$$(s=m+1,\ldots,p;\ \mu=1,2,\ldots,m),$$

d'où, par intégration dans l'interval du choc, on obtiendra les équations du mouvement cherchées :

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\mu}+\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s}c_{s\mu}\right)_{t=t_1}=\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\mu}+\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_s}c_{s\mu}\right)_{t=t_0}, \tag{II.13}$$

$$(\mu=1,2,\ldots,m;\ s=m+1,\ldots,p),$$

c'est -à-dire les équations trouvées dans [6], mais avec d'autres significations pour les grandeurs g_{ij}, g_{i0}, g_{00} et $c_{\lambda\mu}$.

Si le choc est plastique, au système (II.13) on doit associer le système (II.7)—les liaisons nonholonomes se maintiennent après le choc et donc les équations (I.9) seront valable à l'instant t_1—le problème étant ainsi déterminé.

Si le choc est élastique, les liaisons nonholonomes seront supriméeˢ à la fin du choc, les équations ne seront plus valable à l'instant t_1 et pourʳ

la résolution du problème seront nécessaires encores l équations, de nature expérimentales, entre les vitesses generalisées.

III. Conclusions

1. L'étude effectué a démontré la valabilité aussi pour les systèmes mécaniques de solides rigides des équations déduites par Iu. I. Neimark et N. A. Fufaev pour les systèmes de points matériels, à la condition de remplacer les expressions des coefficients g_{ij}, g_{i0} et g_{00} par les expressions trouvées dans les travaux [1],...,[5], les coefficients $c_{\lambda\mu}$ par les expressions qui résultent des relations (I.7) et (I.8) et les expressions des forces generalisées percutantes par (I.23), qui tiennent compte aussi des couples percutants.

2. L'acceptation de la définition introduite dans les travaux [1]...[5], pour la notion de point matériel — définition en totale concordance avec le sens qu'on y atribue dans la technique — permet de retrouver les équations déduites dans [6], comme une forme particulière des équations établies dans cette Note.

Reçue le 28 novembre 1970

Institut Politechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **X (XIV)**, *3—4* (1964).
2. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIII (XVII)**, *1—2* et *3—4* (1967).
3. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIII (XVII)**, *3—4* (1967).
4. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIV (XVIII)**, *3—4* (1968).
5. Mangeron D., Deleanu Sp., *Sur une classe d'équations de la mécanique analitique au sens de J. Tzénoff.* C.r. de l'Acad. Bulgare des Sc., **5**, *1* (1962).
6. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., *Динамика неголономных систем.* Изд. „Наука", 1967, стр. 161—167.
7. Silaş Gh., Groşanu I., Brîndeu L., *Asupra unui sistem neolonom.* Bul. şt. şi tehn. Inst. polit. Timişoara, 3 (1958).

ASUPRA MIŞCĂRILOR IMPULSIVE ALE SISTEMELOR MECANICE NEOLONOME CONSTITUITE DIN SOLIDE RIGIDE

(Rezumat)

Înlocuindu-se modelul mecanic al punctului material definit în sensul newtonian prin modelul, mult mai corespunzător realităţii întîlnite în aplicaţiile tehnice, al solidului rigid, se stabilesc ecuaţiile mişcării impulsive a unui sistem mecanic supus la legături neolonome, în aceleaşi situaţii în care au fost stabilite astfel de ecuaţii de către Iu. I. Neimark şi N. A. Fufaev [6] pentru sisteme mecanice constituite din puncte materiale (ecuaţiile lor rezultînd ca o particularizare a celor stabilite în nota de faţă).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 621—50

FREQUENCY RESPONSE OF FIRST ORDER SYSTEMS TO AMPLITUDE MODULATED INPUTS

II. LINEAR MODULATED INPUTS

BY

ALFRED BRAIER

1. Introduction

In [1] was studied the steady-state response of first order systems, having

$$W(s) = \frac{1}{Ts+1} \tag{1}$$

as transfer function, to inputs

$$x(t) = X\,e^{\delta t}\sin(pt+\psi)\sin(\omega t+\varphi), \tag{2}$$

where X, δ, p, ω, ψ and φ are constant quantities. Input (2) has been called simple harmonic amplitude modulated oscillation.

In this paper we are studying the frequency response of system (1) to inputs

$$x(t) = (Xt+Y)e^{\delta t}\sin(\omega t+\varphi), \tag{3}$$

where $A(t) = (Xt+Y)\,e^{\delta t}$ represents the amplitude modulation (X, Y, δ, ω and φ — as constants).

Signal (3) is to be called oscillation with *linear amplitude modulation.*

2. Symbolic Representation of Linear Amplitude Modulated Oscillations

2.1. It was proved ([3], [4] and especially [5]) that the function (3) can be symbolically represented by an element

$$\hat{w} = a_1 + a_2\,\mathrm{u} + a_3\,\mathrm{j} + a_4\,\mathrm{uj} \tag{4}$$

of Sobrero's algebra [6], with the derivation operator and multiplication table, in a suitable basis for that symbolic representation, namely

$$\hat{d} = \delta + \mathrm{u} + \omega\mathrm{j}, \qquad \mathrm{u}^2 = 0, \quad \mathrm{j}^2 = -1, \quad (\mathrm{uj})^2 = (\mathrm{ju})^2 = 0. \tag{5}$$

That means that to the derivative with respect to t of function (3) (dx/dt) corresponds the element $\hat{d}\hat{w}(=\hat{w}\hat{d})$, obtained by multiplying (5_1) with (4), according to the rules (5_2) (just in the same manner in which to the derivative of an harmonic function corresponds a multiplication with $j\omega$ $(j^2 = -1)$ of the respective complex number, in the usual symbolic representation).

The components of element (4) attached to function (3) are

$$a_1 = X\cos\varphi, \qquad a_2 = Y\cos\varphi, \qquad a_3 = X\sin\varphi, \qquad a_4 = Y\sin\varphi. \tag{6}$$

They satisfy the condition

$$a_1a_4 - a_2a_3 = 0. \tag{7}$$

Elements (4), (7) will be called special ones.

2.2. Let introduce (6) in (4). It results

$$\hat{w} = (X + Y\,\mathrm{u})e^{j\varphi}, \tag{8}$$

i.e. the exponential form of a special element (7) [7].

For an arbitrary element (which does not satisfy condition (7)) let write

$$\hat{w} = (X + Y\,\mathrm{u} + Z\,\mathrm{uj})e^{j\varphi} \tag{9}$$

and develop. Now

$$\begin{cases} a_1 = X\cos\varphi, & a_2 = Y\cos\varphi - Z\sin\varphi, \\ a_3 = X\sin\varphi, & a_4 = Y\sin\varphi + Z\cos\varphi. \end{cases} \tag{10}$$

It follows immediately

$$X = \sqrt{a_1^2 + a_3^2}, \quad Y = \frac{a_1a_2 + a_3a_4}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}, \quad Z = \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}}, \quad \tan\varphi = \frac{a_3}{a_1}. \tag{11}$$

The hypercomplex number $X + (Y + Z\,\mathrm{j})\mathrm{u}$ plays the rôle of a modul for (4), while φ is its argument. With

$$\begin{cases} a_2 = V\cos\lambda, \\ a_4 = V\sin\lambda, \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} V = \sqrt{a_2^2 + a_4^2}, \\ \tan\lambda = \dfrac{a_4}{a_2}, \end{cases} \tag{12}$$

it results $Y = V\cos(\lambda - \varphi)$, $Z = V\sin(\lambda - \varphi)$, where (10_1) and (11_1) have been taken into account. Then $Y + Z\,\mathrm{j} = Ve^{\mathrm{j}(\lambda-\varphi)}$ and element (9) may still be written as

$$\hat{w} = X\,e^{j\varphi} + V\mathrm{u}\,e^{j\lambda} \tag{13}$$

(if (7) takes place, then $\lambda = \varphi$ and $V = Y$ and it results the exponential form (8) of a special element).

An elementary direct calculation proves that $1/(1 + A\,\mathrm{u} + B\,\mathrm{uj}) = 1 - A\,\mathrm{u} - B\,\mathrm{uj}$. Finaly it results for the inverse element of (9)

$$\frac{1}{\hat{w}} = \frac{1}{X^2}(X - Y\,\mathrm{u} - Z\,\mathrm{uj})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \frac{1}{X^2}[X\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} - V\mathrm{u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\varphi-\lambda)}]. \tag{14}$$

The elements having $X = 0$, i.e.

$$a_1 = a_3 = 0 \tag{15}$$

are divisors of zero in Sobrero's algebra, utilised here in order to represent symbolically the oscillation with linear amplitude modulation.

By utilising (9) the multiplication of two elements becomes

$$\begin{aligned}\hat{w}_1\hat{w}_2 &= (X_1 + Y_1\,\mathrm{u} + Z_1\,\mathrm{uj})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}(X_2 + Y_2\,\mathrm{u} + Z_2\,\mathrm{uj})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = \\ &= [X_1X_2 + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\,\mathrm{u} + (X_1Z_2 + X_2Z_1)\,\mathrm{uj}]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}.\end{aligned} \tag{16}$$

We conclude that only the product (respective division) of two special elements of Sobrero's algebra ($Z_1 = Z_2 = 0$) gives also a special one. If $X_1Z_2 + X_2Z_1 = 0$, the product of two arbitrary elements results in a special one.

2.3. In order to obtain the function which corresponds to an arbitrary element (4), let be (9) written as $\hat{w} = (X + Y\,\mathrm{u})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + Z\mathrm{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2+\varphi)}$. Then, in agreement with the correspondence between elements (8) and functions (3), it follows that

$$x(t) = [(Xt + Y)\sin(\omega t + \varphi) + Z\cos(\omega t + \varphi)]\,\mathrm{e}^{\delta t}. \tag{17}$$

By using the substitution

$$Xt + Y = \mathcal{A}(t)\cos\Theta(t), \qquad Z = \mathcal{A}(t)\sin\Theta(t) \tag{18}$$

we find

$$x(t) = \mathcal{A}(t)\sin[\omega t + \varphi + \Theta(t)], \tag{19}$$

respectively that the motion (17) presents the character of an amplitude and phase modulated oscillation, with

$$\mathcal{A}(t) = \sqrt{X^2t^2 + 2XYt + (Y^2 + Z^2)}, \qquad \tan\Theta(t) = \frac{Z}{Xt + Y}. \tag{20}$$

If we associate in (17) $Y\sin(\omega t + \varphi) + Z\cos(\omega t + \varphi)$ and take into account the expressions of Y and Z, the motion becomes

$$x(t) = [Xt\sin(\omega t + \varphi) + V\sin(\omega t + \lambda)]\mathrm{e}^{\delta t}, \tag{21}$$

in direct concordance with the form (13) of the hypercomplex number (9).

If the element is divisor of zero (15), then according to (10) and (13) it follows that it represents symbolically „degenerated" functions

$$x(t) = V\mathrm{e}^{\delta t}\sin(\omega t + \lambda), \tag{22}$$

where V and λ are expressed by (12_2).

Therefore, with the derivation operator (5_1), an hypercomplex number (element of Sobrero's algebra) (4), (5_2) represents symbolically the amplitude and phase modulated oscillation (17) (or (21)); the special element (7) corresponds to an oscillation only linear amplitude modulated (3), while the divisors of zero (15) represent the motion (22).

3. Steady-state Response of First Order System to Linear Amplitude Modulated Inputs

3.1. If $\hat{X}_{(i)}$ is the hypercomplex number which represents symbolically input (3) (or (17)) applied to a first order system, then the element attached to the steady-state output (with vanishing initial conditions) is

$$\hat{X}_{(o)} = \hat{W}(\hat{d})\,\hat{X}_{(i)}. \tag{23}$$

Element $\hat{W}(\hat{d})$ is the system transferance [8]. It results by replacing in the transfer function (1) the usual variable by the derivation operator (5_1). It results

$$\hat{W} = \frac{1}{(1 + T\delta) + T\mathrm{u} + T\omega\,\mathrm{j}}\left(= \frac{1}{\hat{K}}\right). \tag{24}$$

By utilising the components of $\hat{K}$, namely

$$k_1 = 1 + T\delta, \qquad k_2 = T, \qquad k_3 = T\omega, \qquad k_4 = 0, \tag{25}$$

it follows that (see (7)) element $\hat{K}$ and therefore the transferance $\hat{W} = 1/\hat{K}$ cannot be a special element; $\hat{K}$ also cannot be divisor of zero (15).

Therefore, if $\hat{X}_{(i)}$ is a special element, $\hat{X}_{(o)}$ results an arbitrary one, respectively, *an input of type (3) applied to a first order system, yields always to a distorsionated steady-state output* (i.e. in addition phase modulated), having the forme (17) (or (21)). Also, signal (3) cannot produce resonance at the output of a first order system.

Having in mind the expression (14), we may write

$$\hat{W} = W\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Phi} - W^{\star}\mathrm{u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\Phi-\Lambda)}, \tag{26}$$

where $W = 1/K_1$, $W^{\star} = K_2/K_1^2$. The quantities K_1, K_2, Λ and Φ are calculated for element $\hat{K}$ (25) by utilising (11_1), (12_2) and (11_4). It follows

$$\begin{cases} W = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + T\delta)^2 + T^2\omega^2}}, \qquad W^{\star} = \dfrac{T}{(1 + T\delta)^2 + T^2\omega^2} = TW_1^2, \\ \tan\Phi = \dfrac{T\omega}{1 + T\delta}, \qquad \Lambda = 0. \end{cases} \tag{27}$$

3.2. The hypercomplex number $\hat{X}_{(o)}$ corresponding to input (3) is to be obtained by multiplying (8) with (26) (where $\Lambda = 0$); namely

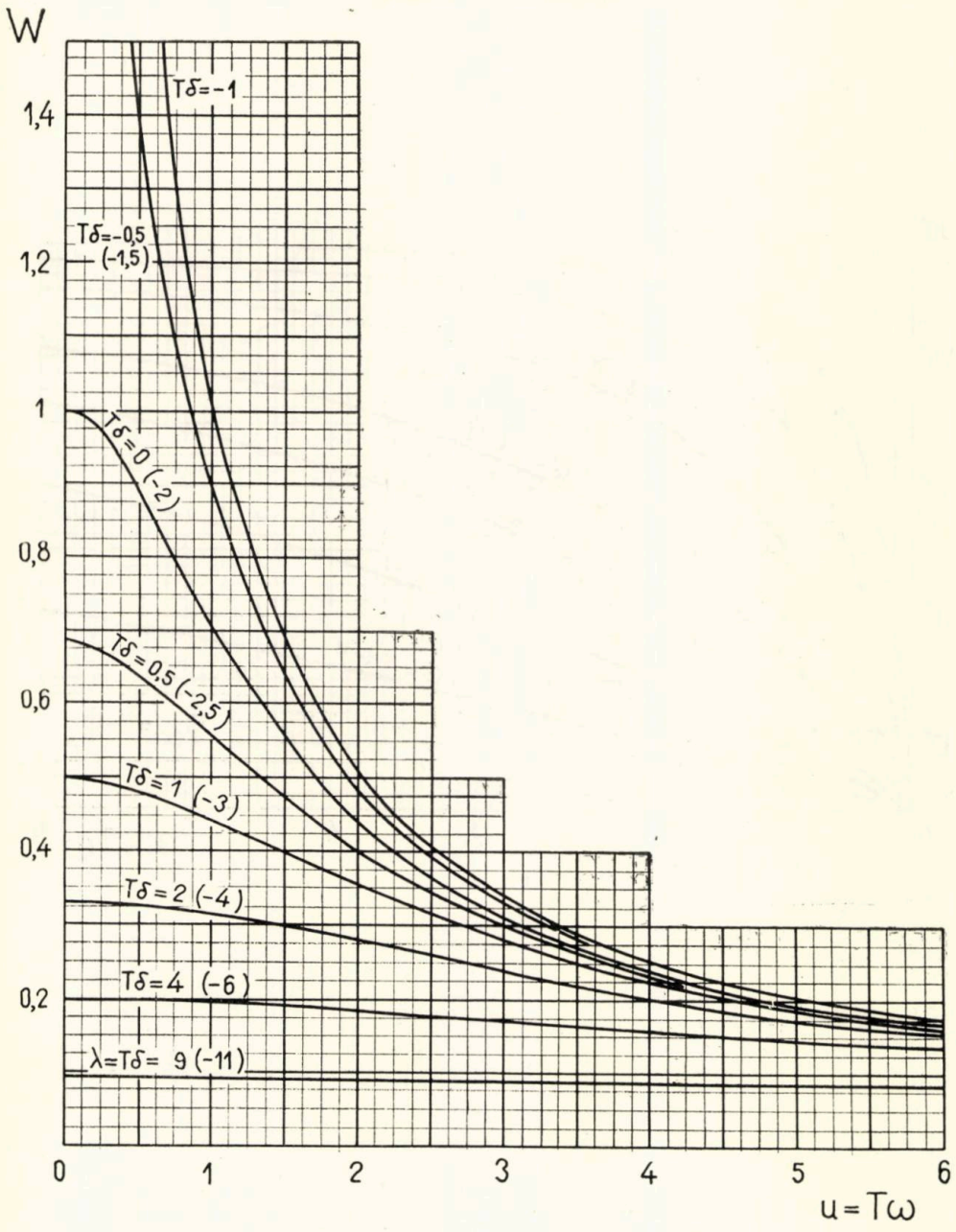

W
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
5
6
u = Tω
Tδ=-1
Tδ=-0,5 (-1,5)
Tδ=0 (-2)
Tδ=0,5 (-2,5)
Tδ=1 (-3)
Tδ=2 (-4)
Tδ=4 (-6)
λ=Tδ= 9 (-11)

Fig. 1

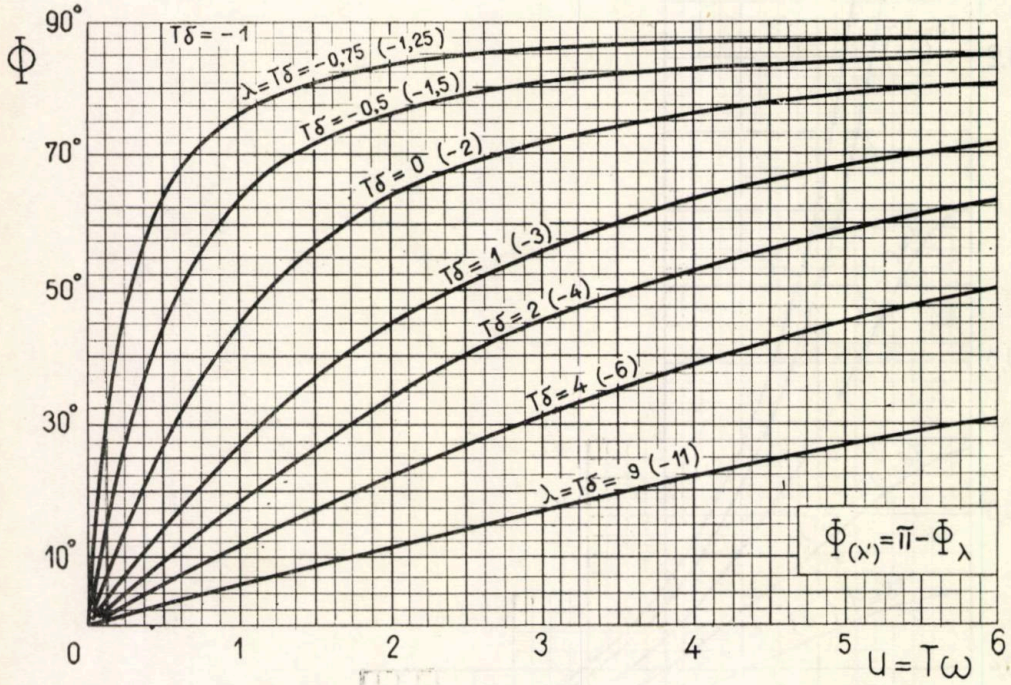

Φ
90°
70°
50°
30°
10°
0
1
2
3
4
5
6
u = Tω
Tδ = −1
λ = Tδ = −0,75 (−1,25)
Tδ = −0,5 (−1,5)
Tδ = 0 (−2)
Tδ = 1 (−3)
Tδ = 2 (−4)
Tδ = 4 (−6)
λ = Tδ = 9 (−11)
Φ(λ) = π̄ − Φλ

Fig. 2

$$X_{(o)} = (X + Y\,u)e^{j\varphi}(W\,e^{-j\Phi} - W^{\star}\,ue^{-j2\Phi}) = \tag{28}$$
$$= W(X + Y\,u)e^{j(\varphi-\Phi)} - XW^{\star}\,ue^{j(\varphi-2\Phi)}.$$

In virtue of the above indicated correspondence (between element (13) and function (21)) we can write immediately the dependence on the time

$$x_{(o)}(t) = W[(Xt + Y)\sin(\omega t + \varphi - \Phi) - XTW\sin(\omega t + \varphi - 2\Phi)]\,e^{\delta t} \tag{29}$$

for the steady-state output produced by input (3), applied to a first order system.

Particular cases. a) If the input is $x_{(i)} = (Xt + Y)\sin(\omega t + \varphi)$, i.e. $\delta = 0$, then

$$x_{(o)}(t) = \frac{Xt + Y}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi - \Phi) - \frac{XT}{1 + T^2\omega^2}\sin(\omega t + \varphi - 2\Phi), \quad \Phi = \tan^{-1}(T\omega). \tag{30}$$

b) If the atenuation constant δ and the system time constant T satisfy the relation $1 + T\delta = 0$, then the steady-state response produced by input (3) is

$$x_{(o)}(t) = \frac{1}{T\omega}\left[-(Xt + Y)\cos(\omega t + \varphi) - \frac{X}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]e^{-t/T}. \tag{31}$$

c) The damped harmonic oscillation $x_{(o)}(t) = Ae^{\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ corresponds to $X = 0$, $Y = A$ and leads to the output [1])

$$x_{(o)}(t) = \frac{A\,e^{\delta t}}{\sqrt{(1 + T\delta)^2 + T^2\omega^2}}\sin\left(\omega t + \varphi - \tan^{-1}\frac{T\omega}{1 + T\delta}\right). \tag{32}$$

4. The Frequency Response

Let be the reduced parameters

$$\lambda = T\delta, \qquad u = T\omega, \tag{33}$$

respectively *reduced atenuation* and *reduced frequency*. Then the amplitude ratio W (27_1) and phase angle Φ (27_3) become

$$W = \frac{1}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 + u^2}}, \qquad \Phi = \tan^{-1}\frac{u}{1 + \lambda}. \tag{34}$$

The plot of W and Φ vs. u for different values of λ leads to new amplitude and phase response curves for a first order system, relative to input (3) (Figs. 1 and 2). If $\lambda = T\delta = 0$ one obtains the usual curves related to purely harmonic input [2, p. 90]. Each curve is valid for both $1 + \lambda > 0$ and $1 + \lambda' < 0$ which corespond to a given value of $|1 + \lambda|$ Namely $W_{\lambda'} = W_{\lambda}$ and $\Phi_{\lambda'} = \pi - \Phi_{\lambda}$.

[1]) This particular cas can be studied directly and more simple by means of the symbolic representation of function (34) by the complex number $z = A(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ with the derivation operator $\hat{d} = \delta + j\,\omega$ [5].

The amplitude ratio is greather than 1 only for $u = T\omega < 1$ and $|1 + \lambda| (= |1 + T\delta|) < 1$. It diminishes and becomes practicaly independent of λ if $u = T\omega > 8$. The phase angle Φ approaches $\pi/2$ for $\lambda = T\delta > > -1$, namely more raplidly if $|1 + \lambda|$ is small.

5. Conclusion

1. The symbolic representation of a linear amplitude modulated input (3) by the element (4) of Sobrero's algebra (5_2) is utilised with the purpose of studying the steady-state response of a first order system.

2. The steady-state response presents always the character of a superposition (29) of an oscillation with linear amplitude modulation and a harmonic one, multiplied by $e^{\delta t}$.

3. New frequency response curves are given (Figs. 1 and 2). They are also valid to characterise the output (32) to a damped harmonic input.

Received February 3, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs. (I) Simple Harmonic Modulated Input.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVII (XXI)**, *1–2*, s. IV, 7—14 (1970).
2. Gille J. C., Decaulne P., Pelegrin M., *Théorie et calcul des asservissements.* Dunod, Paris, 1963.
3. Braier A., *La représentation symbolique des fonctions qui vériffient des équations différentielles à coefficients constants.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XI (XV)**, *3–4*, 93—100 (1965).
4. Braier A., *Représentation symbolique des produits de fonctions.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XII (XVI)**, *3–4*, 63–70 (1966).
5. Braier A., *Algebraic Method in the Kinematics and Dynamics of Modulated Vibrations.* Dynamika Strojov; Zbornik referatov VI. Konferencie o dynamike strojov Bratislava — Smolenice 1970, Vol. 2, Slovenská Akademiá Vied, 587–600 (1980).
6. Sobrero L., *Algebra delle funzioni impercomplesse e sue applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità.* R. Accad. d'Italia, Mem. cl. sc. fis., mat. e nat., **VI**, *1*, 1–64 (1934).
7. Braier A., *Exponential Form of the Elements of Some Algebras.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIII (XVII)**, *1–2*, 115–122 (1967).
8. Braier A., *The Transferance of a System.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XV (XIX)**, *3–4*, s. I, 59–68 (1969).

RĂSPUNSUL FRECVENŢIAL AL SISTEMELOR DE ORDINUL ÎNTÎI LA INTRĂRI MODULATE ÎN AMPLITUDINE

II. Intrări cu modulaţie liniară

(Rezumat)

Se utilizează reprezentarea simbolică a oscilaţiei cu modulaţie liniară a amplitudinii (3) prin elementul (4) al algebrei lui Sobrero (5_2) pentru a studia răspunsul de regim permanent (cu condiţii iniţiale nule) al unui sistem de ordinul întîi. Mişcarea de regim permanent are aspectul (29), în care factorul de amplificare şi defazajul se exprimă prin (27_1) şi (27_3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

Ç. D. 531.31

SUR LA DYNAMIQUE DU SOLIDE DONT LA MASSE EST VARIABLE

II. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

PAR

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC et M. STANCU

Introduction

Dans cette Notte seront déduits les théorèmes généraux de la dynamique pour le nouvel modèle mécanique adopté dans la Notte I [8], modèle qui correspond à quelques applications techniques. Il s'agit d'un solide, dont la masse est distribuée en trois zones distinctes: la première avec la masse constante, M_c, la deuxième, M_a, qui annèxe et la troisième, M_d, qui détache continuellement des masses élémentaires, l'échange de particules avec l'extérieur n'influençant pas les directions des axes principales d'inertie relatives à un pôle Q invariablement lié au solide.

Les trois théorèmes généraux de la dynamique seront établis en partant toujours de la relation qui exprime la deuxième loi de la mécanique pour une masse élémentaire, quelconque, du solide.

I. Théorème de l'impulsion

Si l'on désigne par $\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}$, $\mathrm{d}\bar{\mathcal{R}}$ et $\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}$ les forces élémentaires actives passives et intérieures qui sollicitent une masse élémentaire $\mathrm{d}m$ en mouvement relatif avec la vitesse $\bar{v}_r$ et l'accélération $\bar{a}_r$ par rapport au solide base, mobil à son tour, on peut écrire pour cette masse l'équation:

$$\mathrm{d}m\bar{a}_t = \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}} + \mathrm{d}\bar{\mathcal{R}} + \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}} + (-\mathrm{d}m\bar{a}_r) + (-\mathrm{d}m\bar{a}_c) \tag{I.1}$$

L'intégration de cette égalité conduit à la relation:

$$\sum_{(M_c)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_t + \sum_{(M_a)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_t + \sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_t = \sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}} + \sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{\mathcal{R}} + \sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}} +$$

$$+\left(-\sum_{(Ma)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_r\right) + \left(-\sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_r\right) + \left(-\sum_{(M_a)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_C\right) + \left(-\sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_C\right) \tag{I.2}$$

On peut établir aisément les expressions:

$$\sum_{(M_c)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_t = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{H}}_{t_c}), \tag{I.3}$$

$$\sum_{(M_a)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_t = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{H}}_{t_a}) - \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\bar{v}_{C_{a_t}}, \tag{I.4}$$

$$\sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_t = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{H}}_{t_d}) + \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t}\bar{v}_{C_{d_t}}, \tag{I.5}$$

$$\sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}, \tag{I.6}$$

$$\sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}, \tag{I.7}$$

$$\sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}} = 0, \tag{I.8}$$

$$-\left[\sum_{(M_a)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_r + \sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_r\right] = \bar{\mathcal{F}}_{rr}, \tag{I.9}$$

et

$$-\left[\sum_{(M_a)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_c + \sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_c\right] = 2\bar{\omega} \times (\bar{\mathcal{H}}_{r_a} + \bar{\mathcal{H}}_{r_d}) = \bar{\mathcal{F}}_{rc}, \tag{I.10}$$

le symbole $\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}$ désignant la dérivée par rapport au temps effectuée en considérant que les termes affectés se réfèrent seulement au mouvement de transport, $\bar{\mathcal{F}}$ et $\bar{\mathcal{R}}$ indiquant les résultantes des forces actives et passives qui agissent sur le solide, $\bar{\mathcal{F}}_{rr}$ — la force réactive relative et $\bar{\mathcal{F}}_{rc}$ — la force réactive Coriolis.

Avec ces notations la relation (I.2) prends la forme:

$$\text{(I.11)} \qquad \frac{d^*}{dt}[\overline{\mathcal{K}}_t] - \left[\frac{dM_1}{dt}\bar{v}_{C_{a_t}} - \frac{dM_2}{dt}\bar{v}_{C_{d_t}}\right] = \overline{\mathcal{F}} + \overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathcal{F}}_{rr} + \overline{\mathcal{F}}_{rc}$$

et représente *le théorème de l'impulsion dans la dynamique du solide dont la masse est variabile.*

II. Théorème du moment cinétique

Si l'on multiplie les équations (I.1), vectoriel à gauche, avec les vecteurs de positions des masses élémentaires respectives, $\bar{r}$, et on fait de nouveau l'intégration on parvient à l'égalité:

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{(M_c)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_t + \sum_{(M_a)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_t + \sum_{(M_d)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_t = \sum_{(M)} \bar{r}\times d\overline{\mathcal{F}} + \sum_{(M)} \bar{r}\times d\overline{\mathcal{R}} + \\ &+ \sum_{(M)} \bar{r}\times d\overline{\mathcal{F}}_{\text{int}} + \left[\left(-\sum_{(M_a)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_r\right) + \left(-\sum_{(M_d)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_r\right)\right] + \\ &+ \left[\left(-\sum_{(M_a)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_c\right) + \left(-\sum_{(M_d)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_r\right)\right]. \end{aligned}$$

On trouve pour les divers termes de cette relation les significations suivantes:

$$\text{(II.2)} \qquad \sum_{(M_r)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_t = \frac{d^*}{dt}(\overline{\mathcal{K}}_{t_c}),$$

$$\text{(II.3)} \qquad \sum_{(M_a)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_t = \frac{d^*}{dt}(\overline{\mathcal{K}}_{t_a}) - \frac{dM_1}{dt}\bar{r}_{C_a}\times\bar{v}_{C_{a_t}},$$

$$\text{(II.4)} \qquad \sum_{(M_d)} \bar{r}\times dm\,\bar{a}_t = \frac{d^*}{dt}(\overline{\mathcal{K}}_{t_d}) + \frac{dM_2}{dt}\bar{r}_{C_d}\times v_{C_{d_t}},$$

$$\text{(II.5)} \qquad \sum_{(M)} \bar{r}\times d\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{M}},$$

$$\text{(II.6)} \qquad \sum_{(M)} \bar{r}\times d\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{M}}_R,$$

$$\sum_{(M)} \bar{r} \times \mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}} = 0, \tag{II.7}$$

$$\left[-\sum_{(M_a)} \bar{r} \times \mathrm{d}m\, \bar{a}_r - \sum_{(M_d)} \bar{r} \times \mathrm{d}m\, \bar{a}_r \right] = \bar{\mathcal{M}}_{rr}, \tag{II.8}$$

et

$$\left[-\sum_{(M_a)} \bar{r} \times \mathrm{d}m\, \bar{a}_c - \sum_{(M_d)} \bar{r} \times \mathrm{d}m\, \bar{a}_c \right] = \bar{\mathcal{M}}_{rc}, \tag{II.9}$$

$\bar{\mathcal{M}}$ et $\bar{\mathcal{M}}_R$ étant les moments résultants dans l'origine du repère fixe des forces actives et passives qui sollicitent le solide et $\bar{\mathcal{M}}_{rr}$ et $\bar{\mathcal{M}}_{rc}$ — les moments résultants des forces réactives relatives et Coriolis.

C'est ainsi que la relation (II.1) prend la forme finale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{H}}_t) - \left[\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} \bar{r}_{C_a} \times \bar{v}_{C_{a_t}} - \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} \bar{r}_{C_d} \times \bar{v}_{C_{d_t}} \right] = \bar{\mathcal{M}} + \bar{\mathcal{M}}_R + \bar{\mathcal{M}}_{rr} + \bar{\mathcal{M}}_{rc} \tag{II.10}$$

et représente *le théorème du moment cinétique du solide* par rapport au référentiel fixe.

On peut déduire de (II.10) la relation exprimant le théorème du moment cinétique relatif à la rotation instantanée du solide autour du pôle Q invariablement lié à lui.

En effet, pour les termes du premier membre de l'équation (II.10) peuvent être écrites les expressions:

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{K}}_t) = \bar{r}_Q \times \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{H}}_t) + M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{K}}_{Q_{\mathrm{rot}}}) + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \bar{r}'_C \times \bar{v}_Q \tag{II.11}$$

et

$$\left[\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} \bar{r}_{C_a} \times \bar{v}_{C_{at}} - \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} \bar{r}_{C_d} \times \bar{v}_{C_{d_t}} \right] = \bar{r}_Q \times \left[\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} \bar{v}_{C_{a_t}} - \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} \bar{v}_{C_{d_t}} \right] + \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} \bar{r}'_{C_a} \times \bar{v}_{C_{a_t}} - \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} \bar{r}'_{C_d} \times \bar{v}_{C_{d_t}} \tag{II.12}$$

et tout en tenant compte des relations de passage d'un pôle O à un pôle Q pour les moments résultants des forces, on obtiennent les équations:

$$M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{K}}_{Q_{\mathrm{rot}}}) + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \bar{r}'_C \times \bar{v}_a - \left[\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} \bar{r}'_{C_a} \times \bar{v}_{C_{a_t}} - \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} \bar{r}'_{C_d} \times \bar{v}_{C_{d_t}} \right] = \bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{\mathcal{M}}_{Q_R} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_{rr}} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_{rc}}; \tag{II.13}$$

où encore:

$$\text{(II.14)}\qquad \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\bar{\mathcal{K}}_{Q_t}) - \left[\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}\bar{r}'_{C_a}\times\bar{v}_{C_{a_t}} - \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t}\bar{r}'_{C_d}\times\bar{v}_{C_{d_t}}\right] - M(\bar{\omega}\times\bar{r}'_C)\times\bar{v}_Q = \\ = \bar{\mathcal{M}}_Q + \bar{\mathcal{M}}_{Q_R} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_{rr}} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_{rc}}$$

qui expriment, toutes les deux, le théorème cherché.

III. Théorème de l'énérgie

La multiplication, scalaire, de l'équation (I.1) par le déplacement élémentaire de transport de la masse $\mathrm{d}m$:

$$\text{(III.1)}\qquad \mathrm{d}^*\bar{r} = \mathrm{d}\bar{r}_Q + \mathrm{d}\bar{\theta}\times\bar{r}'$$

et ensuite, l'intégration, conduit à la relation:

$$\text{(III.2)}\qquad \sum_{(M_c)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r} + \sum_{(M_a)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r} + \sum_{(M_d)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r} = \sum_{(M)}\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}\mathrm{d}^*\bar{r} + \sum_{(M)}\mathrm{d}\bar{\mathcal{R}}\mathrm{d}^*\bar{r} + \\ + \sum_{(M)}\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}\mathrm{d}^*\bar{r} + \left(-\sum_{(M_a)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r}\right) + \left(-\sum_{(M_d)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r}\right) + \\ + \left(-\sum_{(M_a)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_c\mathrm{d}^*\bar{r}\right) + \left(\sum_{(M_d)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_c\mathrm{d}^*\bar{r}\right)\cdot$$

On établit encore les expressions:

$$\text{(III.3)}\qquad \sum_{(M_c)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r} = \mathrm{d}^*(\mathcal{E}_{t_c}),$$

$$\text{(III.4)}\qquad \sum_{(M_a)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r} = \mathrm{d}^*(\mathcal{E}_{t_a}) - \mathrm{d}M_1\frac{\bar{v}^2_{C_{a_t}}}{2},$$

$$\text{(III.5)}\qquad \sum_{(M_d)}\mathrm{d}m\,\bar{a}_t\mathrm{d}^*\bar{r} = \mathrm{d}^*(\mathcal{E}_{t_d}) + \mathrm{d}M_2\frac{\bar{v}^2_{C_{d_t}}}{2},$$

$$\text{(III.6)}\qquad \sum_{(M)}\mathrm{d}\bar{F}\mathrm{d}^*\bar{r} = \mathrm{d}^*\mathcal{L}_t,$$

$$\sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{R}\,\mathrm{d}^{*}\bar{r} = \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_{R_t}, \tag{III.7}$$

$$\sum_{(M)} \mathrm{d}\bar{F}_{\mathrm{int}}\,\mathrm{d}^{*}\bar{r} = 0, \tag{III.8}$$

$$-\left[\sum_{(Ma)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_r\mathrm{d}^{*}\bar{r} + \sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_r\mathrm{d}^{*}\bar{r}\right] = \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_{rr_t} \tag{III.9}$$

$$-\left[\sum_{(M_a)} \mathrm{d}m\,\bar{a}_c\mathrm{d}^{*}\bar{r} + \sum_{(M_d)} \mathrm{d}m\bar{a}_c\,\mathrm{d}^{*}\bar{r}\right] = \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_{rc_t}, \tag{III.10}$$

La relation (III.2) prends ainsi la forme:

$$\mathrm{d}^{*}(\mathcal{L}_t) - \left[\mathrm{d}M_1\frac{\bar{v}^2_{c_{a_r}}}{2} - \mathrm{d}M_2\frac{v^2_{c_{d_r}}}{2}\right] = \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_t + \tag{III.11}$$

$$+ \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_{R_t} + \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_{rr_t} + \mathrm{d}^{*}\mathcal{L}_{rc_t}$$

et représents *le théorème de l'énérgie pour le modèle mécanique adopté, concernant le mouvement de transport.*

Reçue le 30 novembre 1970

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N., *Asupra mișcării relative a solidului cu masă variabilă.* Bul. Inst. polit. Iași, **IV (VIII)**, *1—2* (1958).
2. Irimiciuc N., *Asupra formei ecuațiilor lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme de puncte cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iași, **IV (VIII)**, *1—2* (1958).
3. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Ecuații generalizate în sensul lui I. Țenov și D. Mangeron pentru sisteme de puncte materiale cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iași, **XI (XV)**, *3—4* (1965).
4. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme mecanice supuse la legături olonome.* Bul. Inst. polit. Iași, **X (XIV)**, *3—4* (1964).
5. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposees aux systèmes de solides rigides.* (I) *Liaisons géométriques,* Bul. Inst. polit. Iași, **XIII (XVII)**, *1—2*, (1967); (II) *Liaisons cinématiques,* Bul. Inst. polit. Iași, **XIII (XVII)**, *3—4* (1967).
6. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIII (XVII)** *3—4* (1967).
7. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analityque dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIV (XVII)**, *3—4* (1967).

8. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Neagu G., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variable.* (I) *Caractéristiques dynamiques,* Bul. Inst. polit. Iași, **XVI (XX)**, *3—4*, s.IV (1970).
9. Космодемьянский А. А., *Общие динамики тела переменной массы.* Уч. зап. МГУ, Механика, **33** (1953).
10. Новоселов В. С., *Некоторые вопросы механики переменных масс с учетам внутреннего деижения частиц.* (I) Вестник ЛГУ, *19* (1956); (II) Вестник ЛГУ, *1* (1957).
11. Ноноселов В. С., *Движение гироскопических систем.* ПММ, **XXIII**, *1* (1959).
12. Новоселов В. С., *Уравнения движэния нелинеиных неголономных систем с переменными массами.* Вест. ЛГУ, *7* (1959).
13. Новоселов В. С., *Аналитическая механика систем с перемеными массами.* Изд. ленинг. Ун-та, 1969.
14. Сапа В. А., *Вариационные принципы в механике переменной массы.* Изд. АН КССР, сер. мат. и мех., *5* (1956).
15. Сапа В. А., *К вопросу од основах аланитическои механики систем с переменнои массы.* Уч. зап. КГУ, **XXX**, *5* (1957).
16. Сапа В. А., *О вариационных принципах в механике перетенной массы.* Изд. АН КССР, сер. матем. и мех., *9* (1960).

ASUPRA DINAMICII SOLIDULUI CU MASA VARIABILĂ

II. Teoremele generale

(Rezumat)

Pentru modelul mecanic adoptat în lucrarea [8], — solidul care anexează și detașează simultan particulele materiale păstrîndu-și orientările axelor principale de inerție relative la un pol legat invariabil de el—se stabilesc cele trei teoreme ale dinamicii : teorema impulsului (I.11), teorema momentului cinetic (II.10), (II.13) și (I.14) precum și teorema energiei (III.11).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 534.01

STABILITY OF FORCED VIBRATION IN UNSYMMETRICAL PIECEWISE-LINEAR SYSTEM

BY

SEIICHIRO MAEZAWA

1. Introduction

We have a lot of important examples of the unsymmetrical piecewise-linear system in mechanical engineering. As for the system with hardening restoring characteristics we have various vibro-impact machines as pile-drivers and impact machining apparatus, and various impact dampers etc. And as for the system with softening restoring characteristics, we have transmitting shaft train with backlash and motor car bouncing on the road etc.

For several years, the author has been studying forced vibrations in various piecewise-linear systems subjected to a hormonic exciting force by means of a perfect Fourier series method [1], and have obtained some resonance curves and wave forms of resulting vibrations for not only harmonic resonances [2] but also for superharmonic [3] as well as for subharmonic resonances [4].

The stability criterions for these vibrations are also established for piecewise-linear systems with symmetrical characteristics [5].

In this paper we reproduce again our perfect Fourier series solution for systems with unsymmetrical characteristics and discuss stability properties of this solution.

The variation equation for the equation of motion in this case becomes a Meissner's equation with a damping term. This is a linear differential equation of the 2nd order with a periodic coefficient of square wave form function. We can calculate two characteristic exponents by utilizing a certain determinant of Hill's type. When any one of these exponents has a positive real part, the instability of motion follows.

Our results are not approximate ones only valid for systems with small nonlinearity, but they are exact and can be applied to any piecewise-linear system with arbitrary large nonlinearity.

2. Perfect Fourier Series Solution for Unsymmetrical System

A spring-mass system of mass m, with piecewise-linear restoring force characteristic $f(x)$ as shown in Fig. 1 and with a damping coefficient c is subjected to a harmonic exciting force of the amplitude q and the

circular frequency ω. The unsymmetrical piecewise-linear characteristic $f(x)$ is represented by two equations according as the system is found in the Region I or in the Region II as follows:

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z) = kz, & z < e_0: \quad \text{Region } I; \\ f(z) = kz + K(z - e_0), & e_0 \leqslant z: \quad \text{Region } II. \end{cases}$$

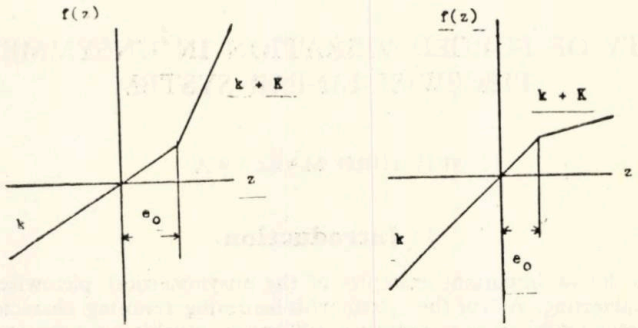


Fig. 1. — Piecewise-linear restoring force characteristics $f(z)$.

The equation of motion becomes

$$(2)\qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + f(z) = q\cos\omega t.$$

We change the independent variable from the time t to the phase angle θ defined by

$$(3)\qquad \theta = \frac{\omega t - \alpha_\nu}{\nu},$$

where ν is put equal to the positive integer representing the order of resonance in case of the subharmonic and super-subharmonic resonances or equal to 1 in case of the harmonic and superharmonic resonances, and α_ν is the phase lag angle to be determined in the following analysis. Then, the equation of motion is transformed into

$$(4)\qquad \Omega_\nu^2\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\theta^2} + 2\zeta\Omega_\nu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{k}f(z) = \frac{q}{k}\cos(\nu\theta + \alpha_\nu),$$

where the frequency ratio Ω_ν and the damping ratio ζ are given by

$$(5)\qquad \Omega_\nu = \frac{\omega}{\nu(k/m)^{1/2}} \quad \text{and} \quad \zeta = \frac{c}{2(mk)^{1/2}}.$$

We divide the restoring force in the Region *II* into two parts, namely the linear part kz and the nonlinear part $K(z - e_0)$. In the Region *I* the nonlinear part can be considered to be zero.

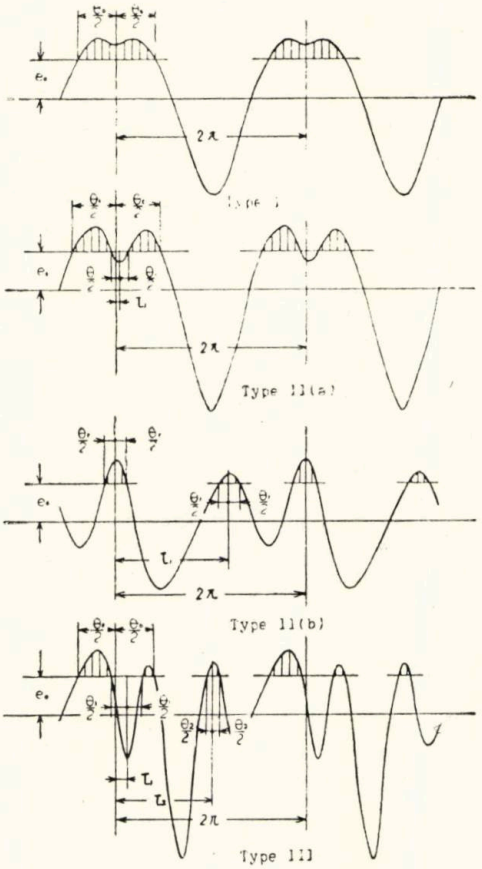


Fig. 2. — Various types of swithing-over conditions.

Once the steady state of vibration is attained, the motion becomes perfectly periodic with the period 2π with respect to θ. The nonlinear part of restoring force, which is now designated by $g(\theta)$, becomes also a periodic function of θ with the same period 2π. Accordingly, it admits a Fourier series expansion as

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{6}$$

We distinguish between several types of the resulting vibrations according as the number of visits to the Region *II* accomplished by the system in one and the same period (Fig. 2). The system visits the Region *II* once, twice and thrice and so on in case of Type *I*, Type *II* and Type *III* and so on respectively. Further, we distinguish two sub-types Type *II* (*a*) and Type *II* (*b*) in case of Type *II* as shown in Fig. 2. And the corresponding switching-over conditions are written down as follows.

$$\left\{\begin{array}{lll}
\theta = \quad \mp \dfrac{\theta_0}{2}, \ \dot{z} \gtrless 0, \ z = e_0 & & : \text{Type } I; \\
\theta = \quad \mp \dfrac{\theta_0}{2}, \ z \gtrless 0, \ z = e_0 & & \\
\theta = \tau_1 \mp \dfrac{\theta_1}{2}, \begin{cases} \dot{z} \lessgtr 0, \\ z \gtrless 0, \end{cases} z = e_0 & & : \begin{cases} \text{Type } II\,(a), \\ \text{Type } II\,(b); \end{cases} \\
\theta = \quad \mp \dfrac{\theta_0}{2}, \ \dot{z} \gtrless 0, \ z = e_0 & & \\
\theta = \tau_1 \mp \dfrac{\theta_1}{2}, \ \dot{z} \lessgtr 0, \ z = e_0 & & : \text{Type } III; \\
\theta = \tau_2 \mp \dfrac{\theta_2}{2}, \ \dot{z} \gtrless 0, \ z = e_0 & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{7}$$

The solution of the equation of motion (4) satisfying the switching-over conditions in case of Type *I* or satisfying those two of the first line of the four or six switching-over conditions in case of Type *II* or Type *III* and so on can be written into the following form,

$$z = \Gamma_\nu \left[\cos \nu\theta - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}' (M_n x_n - N_n y_n) \cos n\theta - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty}{}' (N_n x_n + M_n y_n) \left(\sin n\theta - \frac{\sin \dfrac{n\theta_0}{2}}{\sin \dfrac{\nu\theta_0}{2}} \sin \nu\theta \right) \right], \tag{8}$$

where

$$(9)\qquad \begin{cases} M_n = \dfrac{(1-n^2\Omega_\nu^2)}{\{(1-n^2\Omega_\nu^2)^2+(2\zeta n\Omega_\nu)^2\}}, \\ N_n = \dfrac{2\zeta n\Omega_\nu}{\{(1-n^2\Omega_\nu^2)^2+(2\zeta n\Omega_\nu)^2\}}, \end{cases} \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

and the notation $\sum_{n=1}^{\infty}{}'$ means the summation from $n=1$ to $n=+\infty$ with the only exception of $n=\nu$.

The amplitude Γ_ν and the phase lag angle α_ν of the ν-th harmonic with the same frequency as that of the exciting force are calculated from

$$(10)\qquad \Gamma_\nu = \frac{(q/k)(M_\nu^2+N_\nu^2)^{1/2}}{\left[(1+M_\nu x_\nu - N_\nu y_\nu)^2+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n+M_n y_n)\frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\right\}^2\right]^{1/2}},$$

and

$$(11)\qquad \alpha_\nu = \tan^{-1}\frac{N_\nu}{M_\nu}+\tan^{-1}\frac{\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n+M_n y_n)\dfrac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\right\}}{1+M_\nu x_\nu - N_\nu y_\nu}.$$

The non-dimensional wave form coefficients x_0, x_n and y_n $(n=1,2,3,\ldots)$ are defined by

$$(12)\qquad x_0=\frac{a_0}{k\Gamma_\nu},\quad x_n=\frac{a_n}{k\Gamma_\nu},\quad y_n=\frac{b_n}{k\Gamma_\nu}$$

and can be determined as the solution to an infinite set of simultaneous linear equations for x_0, x_n and y_n as an infinite number of unknowns, which are

$$(13)\qquad \begin{cases} x_m+\dfrac{K}{k}\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_{mn}(M_n x_n - N_n y_n)+\dfrac{K}{k}\sum_{n=1}^{\infty}{}' C_{mn}(N_n x_n+M_n y_n)=\dfrac{K}{k}A_{m\nu}, \\ y_m+\dfrac{K}{k}\sum_{n=1}^{\infty}{}' B_{mn}(N_n x_n+M_n y_n)+\dfrac{K}{k}\sum_{n=1}^{\infty}{}' D_{mn}(M_n x_n - N_n y_n)=\dfrac{K}{k}D_{m\nu}, \end{cases}$$

$$(m=0,1,2,3,\ldots).$$

The expressions for the constants A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} and D_{mn} in these equations change according as the types of switching-over conditions differ.

In case of Type *I*

$$(14)\qquad A_{mn}=A_{mn}(\theta_0),\quad B_{mn}=B_{mn}(\theta_0),\quad C_{mn}=D_{mn}=0,$$
$$(m=0,1,2,3,\ldots \text{ and } n=1,2,3,\ldots)$$

and in case of Type *II* (*a*) (the upper sing) and in case of Type *II* (*b*) (the lower sign)

$$(15)\qquad \begin{cases} A_{mn} = A_{mn}(\theta_0) \mp A_{mn}(\theta_1, \tau_1), \qquad B_{mn} = B_{mn}(\theta_0) \mp B_{mn}(\theta_1, \tau_1), \\ C_{mn} = \pm C_{mn}(\theta_1, \tau_1), \qquad D_{mn} = \pm D_{mn}(\theta_1, \tau_1), \end{cases}$$

$$(m = 0, 1, 2, 3,\ldots \text{ and } n = 1, 2, 3,\ldots)$$

and lastly in case of Type *III*

$$(16)\qquad \begin{cases} A_{mn} = A_{mn}(\theta_0) - A_{mn}(\theta_1, \tau_1) + A_{mn}(\theta_2, \tau_2), \\ B_{mn} = B_{mn}(\theta_0) - B_{mn}(\theta_1, \tau_1) + B_{mn}(\theta_2, \tau_2), \\ C_{mn} = C_{mn}(\theta_1, \tau_1) - C_{mn}(\theta_2, \tau_2), \quad D_{mn} = D_{mn}(\theta_1, \tau_1) - D_{mn}(\theta_2, \tau_2), \end{cases}$$

$$(m = 0, 1, 2, 3,\ldots \text{ and } n = 1, 2, 3,\ldots),$$

$$(17)\qquad \begin{cases} A_{mn}(\theta_0) = \dfrac{K}{k}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{n}{m}\left(\dfrac{\sin\dfrac{m-n}{2}\theta_0}{\dfrac{m-n}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{m+n}{2}\theta_0}{\dfrac{m+n}{2}}\right), \\ B_{mn}(\theta_0) = \dfrac{K}{k}\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\sin\dfrac{m-n}{2}\theta_0}{\dfrac{m-n}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{m+n}{2}\theta_0}{\dfrac{m+n}{2}} - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{\sin\dfrac{n\theta_0}{2}}{\sin\dfrac{\nu\theta_0}{2}}\left(\dfrac{\sin\dfrac{m-\nu}{2}\theta_0}{\dfrac{m-\nu}{2}} - \dfrac{\sin\dfrac{m+\nu}{2}\theta_0}{\dfrac{m+\nu}{2}}\right)\right], \end{cases}$$

and

$$(18)\qquad \begin{cases} A_{mn}(\theta_j, \tau_j) = \dfrac{K}{k}\dfrac{1}{2m\pi}\left[\left(\dfrac{m+n}{m-n}\sin\dfrac{m-n}{2}\theta_j - \sin\dfrac{m+n}{2}\theta_j\right)\cos(m-n)\tau_j - \right. \\ \qquad \left. - \left(\sin\dfrac{m-n}{2}\theta_j - \dfrac{m-n}{m+n}\sin\dfrac{m+n}{2}\theta_j\right)\cos(m+n)\tau_j\right], \\ B_{mn}(\theta_j, \tau_j) = \dfrac{K}{k}\dfrac{1}{2m\pi}\left[\left(\dfrac{m+n}{m-n}\sin\dfrac{m-n}{2}\theta_j - \sin\dfrac{m+n}{2}\theta_j\right)\cos(m-n)\tau_j + \right. \\ \qquad \left. + \left(\sin\dfrac{m-n}{2}\theta_j - \dfrac{m-n}{m+n}\sin\dfrac{m+n}{2}\theta_j\right)\cos(m+n)\tau_j - \right. \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&- \frac{\sin\frac{n\theta_0}{2}}{\sin\frac{\nu\theta_0}{2}} \left\{ \left(\frac{m+\nu}{m-\nu} \sin\frac{m-\nu}{2}\theta_j - \sin\frac{m+\nu}{2}\theta_j \right) \cos(m-\nu)\tau_j + \right. \\
&\left. + \left(\sin\frac{m-\nu}{2}\theta_j - \frac{m-\nu}{m+\nu}\sin\frac{m+\nu}{2}\theta_j \right) \cos(m+\nu)\tau_j \right\} \Bigg], \\
C_{mn}(\theta_j, \tau_j) &= \frac{K}{k}\frac{1}{2m\pi} \left[\left(\frac{m+n}{m-n}\sin\frac{m-n}{2}\theta_j - \sin\frac{m+n}{2}\theta_j \right) \sin(m-n)\tau_j + \right. \\
&+ \left(\sin\frac{m-n}{2}\theta_j - \frac{m-n}{m+n}\sin\frac{m+n}{2}\theta_j \right) \sin(m+n)\tau_j - \\
&- \frac{\sin\frac{n\theta_0}{2}}{\sin\frac{\nu\theta_0}{2}} \left\{ \left(\frac{m+\nu}{m-\nu}\sin\frac{m-\nu}{2}\theta_j - \sin\frac{m+\nu}{2}\theta_j \right) \sin(m-\nu)\tau_j + \right. \\
&\left. \left. + \left(\sin\frac{m-\nu}{2}\theta_j - \frac{m-\nu}{m+\nu}\sin\frac{m+\nu}{2}\theta_j \right) \sin(m+\nu)\tau_j \right\} \right], \\
D_{mn}(\theta_j, \tau_j) &= -\frac{K}{k}\frac{1}{2m\pi} \left[\left(\frac{m+n}{m-n}\sin\frac{m-n}{2}\theta_j - \sin\frac{m+n}{2}\theta_j \right) \sin(m-n)\tau_j - \right. \\
&\left. - \left(\sin\frac{m-n}{2}\theta_j - \frac{m-n}{m+n}\sin\frac{m+n}{2}\theta_j \right) \sin(m+n)\tau_j \right], \\
&(j = 1, 2).
\end{aligned}
\right. \tag{18}
$$

The infinite set of simultaneous linear equations (13) can be written in the form of a single linear equation for an unknown vector $z(x_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ in a Hilbert space, namely

$$(E - P)z = C, \tag{19}$$

where C is a constant vector in the Hilbert space and E and P are an unit matrix and a given constant matrix respectively of an infinite order. The convergency of the double series

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |p_{ik}|^2 \tag{19}$$

constructed of the elements p_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, \ldots)$ of the matrix P guarantees an unique inverse matrix $(E-P)^{-1}$ to the infinite matrix $(E-P)$ of coefficients and so an unique solution for our unknown vector z [6].

Lastly, the switching-over conditions become

$$e_0 = \Gamma_\nu\left(\cos\frac{\nu\theta_0}{2} - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(M_n x_n - N_n y_n)\cos\frac{n\theta_0}{2}\right) \tag{21}$$

in case of Type *I*. And in case of Type *II* (*a*) and Type *II* (*b*), we and to this the 2nd and 3rd ones, namely

$$\begin{aligned} e_0 = \Gamma_\nu\Bigg[&\cos\left(\tau_1 \pm \frac{\nu\theta_1}{2}\right) - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}'(M_n x_n - N_n y_n)\cos n\left(\tau_1 \pm \frac{\theta_1}{2}\right) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n + M_n y_n)\left\{\sin n\left(\tau_1 \pm \frac{\theta_1}{2}\right) - \frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\sin\nu\left(\tau_1 \pm \frac{\theta_1}{2}\right)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{22}$$

and in case of Type *III*, we add again the 4th and 5th ones, namely

$$\begin{aligned} -e_0 = \Gamma_\nu\Bigg[&\cos\nu\left(\tau_2 \pm \frac{\theta_2}{2}\right) - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}(M_n x_n - N_n y_n)\cos n\left(\tau_2 \pm \frac{\theta_2}{2}\right) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n + M_n y_n)\left\{\sin n\left(\tau_2 \pm \frac{\theta_2}{2}\right) - \frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\sin\nu\left(\tau_2 \pm \frac{\theta_2}{2}\right)\right\}\Bigg] \end{aligned} \tag{23}$$

and so on.

We adopt an inverse method for performing calculations. We take the frequency ratio Ω_ν and the nonlinear interval ratio $\theta_0/(2\pi)$ as two parameters. Then, in case of Type *I*, the corresponding non-dimensional wave form coefficients x_0, x_n, and y_n can be obtained as the solution for the infinite set of equations (13), whose coefficients and constants are all known functions of Ω_ν and θ_0 as seen from Eqs. (8), (9) and (17). The amplitude Γ_ν and the phase lag angle α_ν are then given by the formulas (21) and (11). Lastly, the corresponding amplitude q of the exciting force can be obtained from Eq. (10).

In case of Type *II*, we obtain two more linear equations for x_0, x_n and y_n by combining Eqs. (21) and (22), which are

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\nu\theta_0}{2} - \cos\nu\tau_1\cos\frac{\nu\theta_1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}'(M_n x_n - N_n y_n)\left(\cos\frac{n\theta_0}{2} - \cos n\tau_1\cos\frac{n\theta_1}{2}\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n + M_n y_n)\left(\sin n\tau_1\cos\frac{n\theta_1}{2} - \frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\sin\nu\tau_1\cos\frac{\nu\theta_1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

and

$$\begin{aligned} &\sin\nu\tau_1\sin\frac{\nu\theta_1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}'(M_n x_n - N_n y_n)\sin n\tau_1\sin\frac{n\theta_1}{2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n + M_n y_n)\left(\cos n\tau_1\sin\frac{n\theta_1}{2} - \frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\cos\nu\tau_1\sin\frac{\nu\theta_1}{2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

By eliminating x_0, x_n and y_n from Eqs. (13), (24) and (25), we are given two transcendental equations to determine the corresponding τ_1 and θ_1, which are

$$\Phi_1(\Omega_\nu, \theta_0, \theta_1, \tau_1) = 0, \qquad \Phi_2(\Omega_\nu, \theta_0, \theta_1, \tau_1) = 0. \tag{26}$$

Once the corresponding τ_1 and θ_1 are determined, the non-dimensional coefficients x_0, x_n and y_n can be obtained as before as the solution to the infinite set of equations (13), whose coefficients and constantsare now completely known from Eqs. (15), (17) and (18). Then, our calculations proceed quite the same as in case of Type *I*.

In case of Type *III*, we obtain again two more linear equations for x_0, x_n and y_n combining Eq. (21) and Eq. (23), which are

$$\cos\frac{\nu\theta_0}{2} + \cos\nu\tau_2\cos\frac{\nu\theta_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}'(M_n x_n - N_n y_n)\left(\cos\frac{n\theta_0}{2} + \cos n\tau_2\cos\frac{n\theta_2}{2}\right) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n + M_n y_n)\left(\sin n\tau_2\cos\frac{n\theta_2}{2} - \frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\sin\nu\tau_2\cos\frac{\nu\theta_2}{2}\right) = 0 \tag{27}$$

and

$$\sin\nu\tau_2\sin\frac{\nu\theta_2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}{}'(M_n x_n - N_n y_n)\sin n\tau_2\sin\frac{n\theta_2}{2} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}{}'(N_n x_n + M_n y_n)\left(\cos n\tau_2\sin\frac{n\theta_2}{2} - \frac{\sin(n\theta_0/2)}{\sin(\nu\theta_0/2)}\cos\nu\tau_2\sin\frac{\nu\theta_2}{2}\right) = 0. \tag{28}$$

By eliminating x_0, x_n and y_n from Eqs. (13), (24), (25), (27) and (28). we are given four transcendental equations to determine the corresponding τ_1, θ_1, τ_2 and θ_2 as follows:

$$\begin{cases} \Phi_1(\Omega_\nu, \theta_0, \tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2) = 0, & \Phi_2(\Omega_\nu, \theta_0, \tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2) = 0, \\ \Phi_3(\Omega_\nu, \theta_0, \tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2) = 0, & \Phi_4(\Omega_\nu, \theta_0, \tau_1, \theta_1, \tau_2, \theta_2) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Once the corresponding τ_1, θ_1, τ_2 and θ_2 are determined, we can proceed quite the same as before.

3. Variation Equation

To investigate the stability of the resulting vibration, we add a small perturbational variation x to our solution z expressed by Eq. (7) and examine whether this variation x grows up or dies out with time. The differential equation governing this variation x, namely the variation equation to the original equation of motion (4) becomes

$$\Omega_\nu^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\theta^2} + 2\zeta\Omega_\nu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + \left\{1 + \frac{K}{k}\varphi(\theta)\right\}x = 0, \tag{30}$$

where the function $\varphi(\theta)$ is a periodic function of θ with the period 2π.

This function has the square wave form, namely the equation (30) is a Meissner's equation [7] with a linear damping term.

We have considered in the foregoing paragraph various types of the resulting vibrations according as the switching-over conditions between Region *II* and Region *II* vary. The corresponding wave forms of the function $\varphi(\theta)$ to these different types are shown in Fig. 3 *a*, Fig. 3 *b*, Fig. 3 *c* and Fig. 3 *d* for Type *I*, Type *II* (*a*), Type *II* (*b*) and Type *III* respectively.

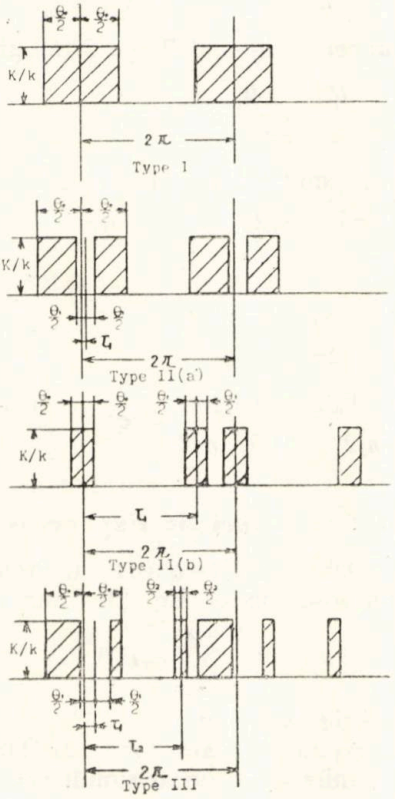


Fig. 3. — Square wave periodic functions for various types of switching-over conditions.

Expanding this periodic function $\varphi(\theta)$ into a perfect Fourier series, we obtain for our variation equation

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + 2\xi\frac{dx}{d\theta} + \frac{1}{\Omega_\nu^2}\left(\sum_{n=-\alpha}^{+\infty}\Theta_n e^{in\theta}\right)x = 0, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{31}$$

where

$$\xi = \frac{\zeta}{\Omega_v} \tag{32}$$

and the coefficients Θ_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) are given for various types of switching-over conditions as follows:

Type *I*:

$$\Theta_0 = 1 + \frac{K}{k}\frac{\theta_0}{2\pi}, \qquad \Theta_n = \frac{K}{k}\frac{\theta_0}{2\pi}\frac{\sin(n\theta_0/2)}{n\theta_0/2}, \quad (n \neq 0); \tag{33}$$

Type *II*(*a*) (the upper sign) and Type *II*(*b*) (the lower sign):

$$\begin{cases} \Theta_0 = 1 + \dfrac{K}{k}\dfrac{\theta_0 \mp \theta_1}{2\pi}, \\ \Theta_n = \dfrac{K}{k}\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin(n\theta_0/2)}{n/2} - \dfrac{\sin(n\theta_1/2)}{n/2}\, e^{-in\tau_1}\right), \quad (n \neq 0); \end{cases} \tag{34}$$

Type *III*:

$$\begin{cases} \Theta_0 = 1 + \dfrac{K}{k}\dfrac{\theta_0 - \theta_1 + \theta_2}{2\pi}, \\ \Theta_n = \dfrac{K}{k}\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin(n\theta_0/2)}{n/2} - \dfrac{\sin(n\theta_1/2)}{n/2}\, e^{-in\tau_1} + \dfrac{\sin(n\theta_2/2)}{n/2}\, e^{-in\tau_2}\right), \quad (n \neq 0). \end{cases} \tag{35}$$

4. Characteristic Exponents

According to the celebrated Floquet's theorem, we can put one or both of two independent solutions of Eq. (32) into the following form

$$x = e^{\lambda\theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}, \tag{36}$$

where λ is the characteristic exponent.

The characteristic exponent λ and the coefficients c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) must satisfy an infinite set of linear simultaneous equations, which are

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots [\{i(\lambda+\xi)+2\}^2 - \Psi_0]\, c_{-2} - \Psi_{-1} c_{-1} - \Psi_{-2} c_0 - \Psi_{-3} c_1 - \Psi_{-4} c_2 \ldots = 0, \\ \ldots - \Psi_1 c_{-2} + [\{i(\lambda+\xi)+1\}^2 - \Psi_0]\, c_{-1} - \Psi_{-1} c_0 - \Psi_{-2} c_1 - \Psi_{-3} c_2 \ldots = 0, \\ \ldots - \Psi_1 c_{-2} - \Psi_1 c_{-1} + [\{i(\lambda+\xi)\}^2 - \Psi_0]\, c_0 - \Psi_{-1} c_1 - \Psi_{-2} c_2 \ldots = 0, \\ \ldots - \Psi_3 c_{-2} - \Psi_2 c_{-1} - \Psi_1 c_0 - [\{i(\lambda+\xi) - 1\}^2 - \Psi_0]\, c_1 - \Psi_{-2} c_2 \ldots = 0 \\ \ldots - \Psi_4 c_{-2} - \Psi_3 c_{-1} - \Psi_2 c_0 - \Psi_1 c_1 + [\{i(\lambda+\xi) - 2\}^2 - \Psi_0]\, c_2 \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{37}$$

where

$$\Psi_0 = \frac{\Theta_0}{\Omega_v^2} - \xi^2 = \frac{\Theta_0 - \zeta^2}{\Omega_v^2}, \qquad \Psi_n = \frac{\Theta_n}{\Omega_v^2}, \quad (n \neq 0). \tag{38}$$

Utilizing the notation

$$\mu = \lambda + \xi \tag{39}$$

we consider here a Hill's infinite determinant

$$\Delta(i\mu) = [A_{mn}]_{m,n \to \pm\infty}, \tag{40}$$

where A_{mn} is the element of mth row and n^{th} column given by

$$A_{mm} = 1, \qquad A_{mn} = \frac{-\Psi_{m-n}}{(i\mu - m)^2 - \Psi_0}, \quad (m \neq n). \tag{41}$$

As our periodic coefficient is not continuous, but only piecewise continuous as a function of θ, this determinant is not normal as that usually discussed [8], [9]. However, its absolute and uniform convergence is guaranteed by the fact that a double series constructed from its elements such as

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} |A_{mn}|^2, \qquad (m \neq n) \tag{42}$$

converges absolutely and uniformly [6].

Then our Hill's determinant admits a partial fraction expansion, namely

$$\Delta(i\mu) = A + B \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\Psi_0}} \left\{ \frac{1}{(i\mu - m) - \sqrt{\Psi_0}} - \frac{1}{(i\mu - m) + \sqrt{\Psi_0}} \right\}, \tag{43}$$

where A and B are certain constants. Determining A according to the Liouville's theorem to be equal to 1 from the condition

$$\lim_{\mu \to \infty} \Delta(i\mu) = 1$$

and utilizing the partial fraction expansion of $\cot z$, we obtain the expression

$$\Delta(i\mu) = 1 - C \frac{\sin 2\pi\sqrt{\Psi_0}}{\sin^2 \pi\sqrt{\Psi_0} + \sinh^2 \pi\mu}, \tag{44}$$

where C is again a certain constant. This constant C can be determined by the value of $\Delta(i\mu)$ at any specified value μ_0 of μ, so that we have

$$\Delta(i\mu)(\sin^2\pi\sqrt{\Psi_0}+\sinh^2\pi\mu)=\Delta(i\mu_0)(\sin^2\pi\sqrt{\Psi_0}+\sinh^2\pi\mu_0)+ \tag{45}$$
$$+\sinh^2\pi\mu-\sinh^2\pi\mu_0.$$

In order that our solution (36) is not trivial, we must have

$$\Delta(i\mu)=0, \tag{46}$$

namely from (45)

$$\Delta(i\mu_0)(\sin^2\pi\sqrt{\Psi_0}+\sinh^2\pi\mu_0)-\sinh^2\pi\mu_0=-\sinh^2\pi\mu \tag{47}$$

and by taking alternatively $\mu_0=0$ and $\mu_0=-i/2$, we obtain two different expressions for the equation to determine the characteristic exponent λ, which are

$$\begin{cases}\sin^2 i\pi(\lambda+\xi)=\Delta(0)\sin^2\pi\sqrt{\Psi_0}\equiv D(0),\\ \cos^2 i\pi(\lambda+\xi)=\Delta\left(\frac{1}{2}\right)\cos^2\pi\sqrt{\Psi_0}\equiv D\left(\frac{1}{2}\right).\end{cases} \tag{48}$$

These two expressions are not independent of each other, since we have always

$$D(0)=D\left(\frac{1}{2}\right)=\Delta(0)\sin^2\pi\sqrt{\Psi_0}+\Delta\left(\frac{1}{2}\right)\cos^2\pi\sqrt{\Psi_0}=1. \tag{49}$$

Because $\Delta(0)$ is a determinant of an Hermite matrix, it is real and from the relation (49) $\Delta(1/2)$ is also real.

4. Stability Criterion

If λ_1 is a root for each of the equations (48), λ_2 satisfying the relations

$$\lambda_1+\lambda_2+2\xi=ni \qquad \text{and} \qquad \lambda_2=\lambda_1+ni,$$

where n is any negative and positive integer, becomes also a root. The latter relation does not give an independent solution of that obtained from λ_1, as easily seen from the expression (36). Contrarily, the former relation give an independent solution excepting the cases of equal roots $\lambda_1=\lambda_2$ (mod i), namely when $\lambda_1=\lambda_2=-\xi$ (mod i) and when $\lambda_1=\lambda_2=-\xi+i/2$ (mod i).

For the sake of brevity, we use hereafter the notation $H\equiv\sinh^2\pi\xi$ and we examine various cases one by one as follows:

1) $$D(0)<-H, \quad \text{namely} \quad D(1/2)>1+H,$$

whence

$$-\sinh\pi\lambda\sinh\pi(\lambda+2\xi)=D(0)+H<0, \tag{50}$$

so $\lambda(\lambda + 2\xi) > 0$ and we have two distinct roots λ_1 and λ_2, so that $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 < -2\xi$. One exponent being real and positive, the motion is unstable.

2) $$-H < D(0) < 0, \quad \text{namely} \quad 1 + H > D(1/2) > 1,$$

whence

(51) $$H > -\sinh \pi\lambda \sinh \pi(\lambda + 2\xi) = D(0) + H > 0,$$

so $\lambda(\lambda + 2\xi) < 0$ and we have two distinct real roots λ_1 and λ_2 so that $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > -2\xi$. Two distinct roots being both real and negative, the motion is stable.

3) $$0 \leqslant D(0) \leqslant 1, \quad \text{namely} \quad 1 \geqslant D(1/2) \geqslant 0,$$

whence

(52) $$1 \geqslant \sin^2 i\pi(\lambda + \xi) = D(0) \geqslant 0.$$

In cases of the inequality, we have two distinct conjugate complex roots λ_1 and λ_2 with negative real part $-\xi$. And in cases of the equality, namely of the equal roots, the solution may have the form

(53) $$x = e^{-\xi\theta}\{(C_1 + C_2\alpha\theta)\, p_1(\theta) + C_2 p_2(\theta)\},$$

where α is a certain constant equal or not equal to 0 as the case may be, C_1 and C_2 are arbitrary constants and $p_1(\theta)$ and $p_2(\theta)$ are certain periodic functions with the period 2π in case of $D(0) = 0$ or 4π in case of $D(0) = 1$. The presence of the factor $e^{-\xi\theta}$ entails in both cases stability of motion.

4) $$1 < D(0) < 1 + H, \quad \text{namely} \quad 0 > D(1/2) > -H,$$

whence, putting

(54) $$\lambda = -\frac{i}{2} + \sigma$$

we obtain from Eq. (48)

(55) $$-H < \sinh \pi\sigma \sinh \pi(\sigma + 2\xi) = -\left(H + D\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 0,$$

so we have two distinct real roots σ_1 and σ_2, so that $0 > \sigma_1 > \sigma_2 > -2\xi$. The two exponents being distinct and having negative real parts, the motion is stable.

5) $$1 + H < D(0), \quad \text{namely} \quad -H > D\left(\frac{1}{2}\right),$$

whence

(56) $$\sinh \pi\sigma \sinh \pi(\sigma + 2\xi) = -\left(H + D\left(\frac{1}{2}\right)\right) > 0,$$

then we have two dinstinct roots σ_1 and σ_2, so that $\sigma_1 > 0$ and $\sigma_2 < -2\xi$. One exponent being real and positive, the motion is unstable.

In the latter two cases of 4) and 5), we have two independent solutions of the form

$$x = e^{\sigma_j \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\left(n-\frac{1}{2}\right) i\theta}, \qquad (j = 1, 2), \tag{57}$$

where the function under the summation notation is periodic with the period 4π.

Based on the above considerations, we can establish our stability criterion as follows (see also Fig. 4).

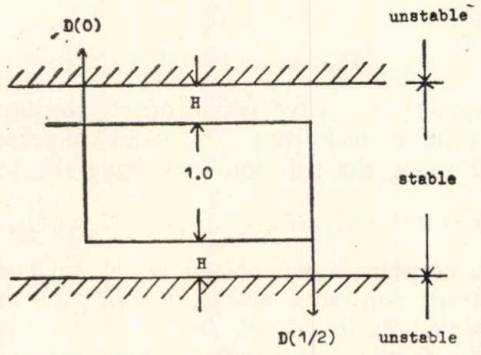


Fig. 4. — Stable and unstable regions.

The motion is stable when $D(0) + H$ *and* $D(1/2) + H$ *are both positive. Contrarily, the motion is unstable when either* $D(0) + H$ *or* $D(1/2) + H$ *becomes negative. The subdivision curves between the stable and unstable regions are represented by the equations*

$$D(0) + H = 0 \quad \text{and} \quad D\left(\frac{1}{2}\right) + H = 0. \tag{58}$$

6. Real Expression and Some Numerical Results

To apply this stability criterion, it is convenient to have its expression consisting of real quantities only. Our variation equation (30) is a real equation, so that we are given a real Fourier series

$$1 + \frac{K}{k}\varphi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n e^{in\theta} \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{59}$$

So we have

$$(60)\qquad \Theta_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad \Theta_n = \frac{a_n - \mathrm{i}\, b_n}{2}, \qquad \Theta_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}\, b_n}{2}, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Putting $\mu = \xi$ and $\mu_0 = 0$ in Eq. (45), we obtain

$$(61)\qquad \begin{aligned} D_\xi(0) \equiv D(0) + H &= \Delta(0) \sin^2 \pi \sqrt{\Psi_0} + \sinh^2 \pi \xi = \\ &= \Delta(\mathrm{i}\,\xi)\,(\sinh^2 \pi \sqrt{\Psi_0} + \sinh^2 \pi \xi) \end{aligned}$$

and similarly, putting $\mu = \xi - \mathrm{i}/2$ and $\mu_0 = -\mathrm{i}/2$, we have

$$(62)\qquad \begin{aligned} D_\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \equiv D\left(\frac{1}{2}\right) + H &= \Delta\left(\frac{1}{2}\right) \cos^2 \pi \sqrt{\Psi_0} + \sinh^2 \mu\, \xi = \\ &= \Delta\left(\mathrm{i}\,\xi + \frac{1}{2}\right)\,(\cos^2 \pi \sqrt{\Psi_0} + \sinh^2 \pi \xi)\,. \end{aligned}$$

And utilizing the infinite product expressions for $\sin z$ and $\cos z$, namely

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) \quad \text{and} \quad \cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{z^2}{(n - 1/2)^2 \pi^2}\right\},$$

and taking into account the relations

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin (x + y) \sin (x - y),$$
$$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos (x + y) \cos (x - y),$$

we obtain

$$D_\xi(0) = D(0) + H = \frac{(-1)\pi^2}{\Omega_\nu^2 [\Omega_\nu^2 (2\,\Omega_\nu)^2 (4\,\Omega_\nu)^2 \ldots]^2} \times$$

$$(63)\qquad \times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots, (2\,\Omega_\nu)^2 + 4\,\mathrm{i}\,\zeta\,\Omega_\nu - \Theta_{-0}, & -\Theta_{-1}, & -\Theta_{-2}, & -\Theta_{-3}, & -\Theta_{-4}, \ldots \\ \ldots, -\Theta_1, & \Omega_\nu^2 + 2\,\mathrm{i}\,\zeta\,\Omega_\nu - \Theta_0, & -\Theta_{-1}, & -\Theta_{-2}, & -\Theta_{-3}, \ldots \\ \ldots, -\Theta_2, & -\Theta_1, & -\Theta_0, & -\Theta_{-1}, & -\Theta_{-2}, \ldots \\ \ldots, -\Theta_3, & -\Theta_2, & -\Theta_1, & \Omega_\nu^2 - 2\,\mathrm{i}\,\zeta\,\Omega_\nu - \Theta_{-0}, & -\Theta_{-1}, \ldots \\ \ldots, -\Theta_4, & -\Theta_3, & -\Theta_2, & -\Theta_1, & (2\,\Omega_\nu)^2 - 4\,\mathrm{i}\,\zeta\,\Omega_\nu - \Theta_0, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

and

$$D_\xi\left(\frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}\right) + H = \frac{1}{[(\Omega_\nu/2)^2(3\Omega_\nu/2)^2(5\Omega_\nu/2)^2\ldots]^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots, \left(\frac{3}{2}\Omega_\nu\right)^2 + 3i\zeta\Omega_\nu - \Theta_0, & -\Theta_{-1}, & -\Theta_{-2}, & -\Theta_{-3}, & \ldots \\ \ldots, -\Theta_1, & \left(\frac{1}{2}\Omega_\nu\right)^2 + i\zeta\Omega_\nu & -\Theta_0, & -\Theta_{-1}, & -\Theta_{-2}, \ldots \\ \ldots, -\Theta_2, & -\Theta_1, & \left(\frac{1}{2}\Omega_\nu\right)^2 - i\zeta\Omega_\nu & -\Theta_0, & -\Theta_{-1}, \ldots \\ \ldots, -\Theta_3, & -\Theta_2, & -\Theta_1, & \left(\frac{3}{2}\Omega_\nu\right)^2 - 3i\zeta\Omega_\nu - \Theta_0, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{64}$$

After some transformations, we are given as the final results the following real expressions for $D_\xi(0)$ and $D_\xi(1/2)$,

$$D_\xi(0) = D(0) + H = \frac{(-1)\pi^2}{\Omega_\nu^2[\Omega_\nu^2(2\Omega_\nu)^2(4\Omega_\nu)^2\ldots]^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots, (2\Omega_\nu)^2 - \frac{a_0+a_4}{2}, & -\frac{a_1+a_3}{2}, & -\frac{a_2}{\sqrt{2}}, & \frac{b_1-b_3}{2}, & -4\zeta\Omega_\nu - \frac{b_4}{2}, \ldots \\ \ldots, -\frac{a_1+a_3}{2}, & \Omega_\nu^2 - \frac{a_0+a_2}{2}, & -\frac{a_1}{\sqrt{2}}, & -2\zeta\Omega_\nu - \frac{b_2}{2}, & -\frac{b_1+b_3}{2}, \ldots \\ \ldots, -\frac{a_2}{\sqrt{2}}, & -\frac{a_1}{\sqrt{2}}, & -\frac{a_0}{\sqrt{2}}, & -\frac{b_1}{\sqrt{2}}, & -\frac{b_2}{\sqrt{2}}, \ldots \\ \ldots, -\frac{b_1-b_3}{2}, & 2\zeta\Omega_\nu - \frac{b_2}{2}, & -\frac{b_1}{\sqrt{2}}, & \Omega_\nu^2 - \frac{a_0-a_2}{2}, & -\frac{a_1-a_3}{2}, \ldots \\ \ldots, 4\zeta\Omega_\nu - \frac{b_4}{2}, & -\frac{b_1+b_3}{2}, & -\frac{b_2}{\sqrt{2}}, & -\frac{a_1-a_3}{2}, & (2\Omega_\nu)^2 - \frac{a_0-a_4}{2}, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{65}$$

and

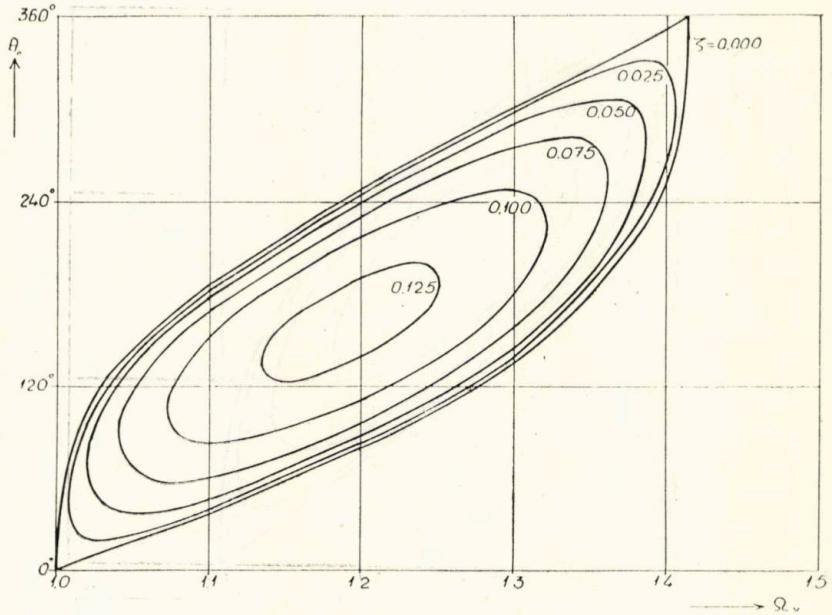


Fig. 5*a*. — Main unstability regions for various damping ratios for K/k = 1.0.

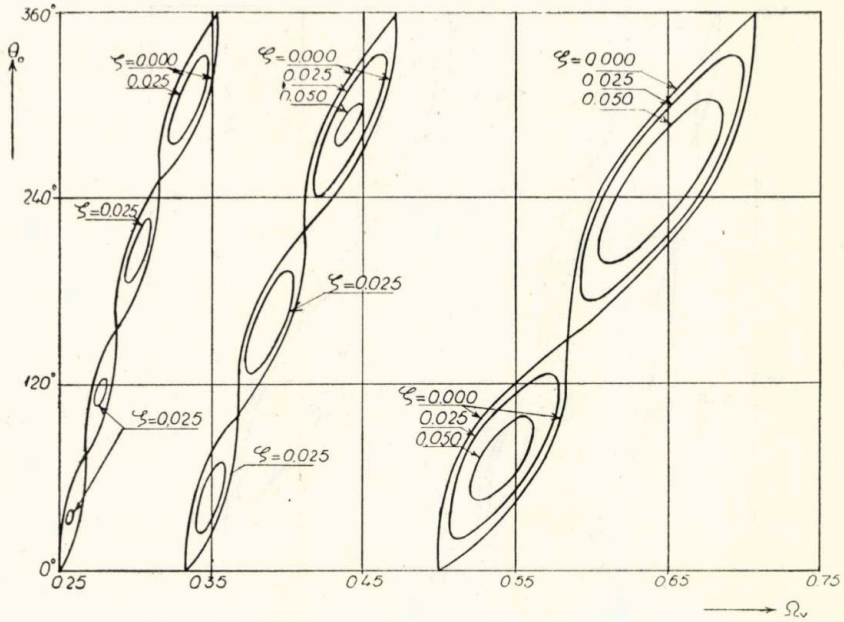


Fig. 5*b*. — Unstability regions of 1/2 th, 1/3 th and 1/4 th order for various damping ratios for K/k = 1.0.

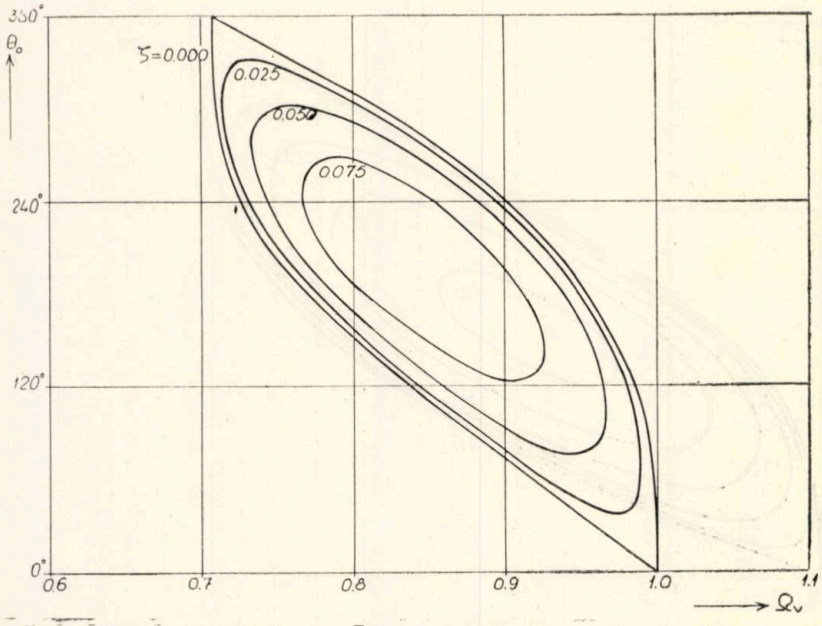


Fig. 5*c*. — Main unstability regions for various damping ratios for K/k = — 0.5.

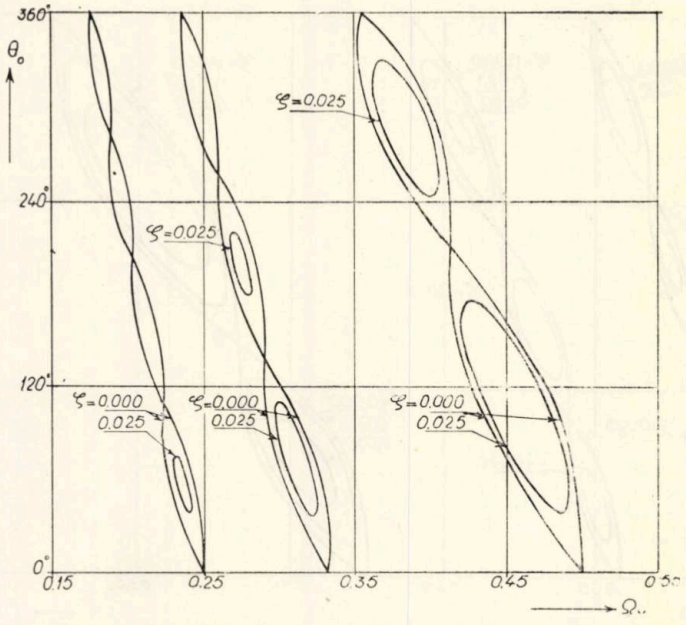


Fig. 5*d*. — Unstability regions of 1/2 th, 1/3 th and 1/4 th order for various damping ratios for K/k = —0.5.

$$D_\xi\left(\frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}\right) + H = \frac{1}{[(\Omega_\nu/2)^2\,(3\,\Omega_\nu/2)\,(5\,\Omega_\nu/2)^2 \ldots]^2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots, \left(\frac{3\,\Omega_\nu}{2}\right)^2 - \frac{a_0+a_3}{2}, & -\frac{a_1+a_2}{2}, & \frac{b_1-b_2}{2}, & -3\zeta\,\Omega_\nu - \frac{b_3}{2}, \cdots \\ \cdots, -\frac{a_1+a_2}{2}, & \left(\frac{\Omega_\nu}{2}\right)^2 - \frac{a_0+a_1}{2}, & \zeta\,\Omega_\nu - \frac{b_1}{2}, & -\frac{b_1+b_2}{2}, \cdots \\ \cdots, \frac{b_1-b_2}{2}, & \zeta\,\Omega_\nu - \frac{b_1}{2}, & \left(\frac{\Omega_\nu}{2}\right)^2 - \frac{a_0-a_1}{2}, & -\frac{a_1-a_2}{2}, \cdots \\ \cdots, 3\zeta\,\Omega_\nu - \frac{b_3}{2}, & -\frac{b_1+b_2}{2}, & -\frac{a_1-a_2}{2}, & \left(\frac{3}{2}\,\Omega_\nu\right)^2 - \frac{a_0-a_3}{2}, \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{66}$$

Namely, our stability criterion stands:

If both $D_\xi(0) > 0$ *and* $D_\xi(1/2) > 0$, *the motion is stable. Contrarily, if either* $D_\xi(0) < 0$ *or* $D_\xi(1/2) < 0$, *the motion is unstable.*

The stability charts in case of Type *I* for the system with $K/k = 1.0$ and for that with $K/k = -1/2$ are illustrated in Fig. 5*a*, 5*b*, 5*c* and 5*d*. They show subdivision curves between the stable and untstable regions on the Ω_v versus $\theta_0/(2\pi)$ plane.

7. Conclusion

1. We have here a general program for our further study into the stability problems for steady forced vibrations in various piecewise-linear systems with unsymmetrical restoring force characteristics. A stability criterion has been obtained by reducing the problem to that of the solution to the variation equation of the original equation of motion, which in this case becomes a Meissner's equation with a linear damping term.

2. The subdivision curves between stable and unstable regions are represented by two equations each of which prescribes for a certain determinant of Hill's type, a function of the frequency ratio Ω_ν and the nonlinear interval ratio $\theta_0/(2\pi)$ a certain definite value corresponding to the damping ratio of the system.

3. The same stability chart thus constructed can be used to all the cases of harmonic, superharmonic, subharmonic and supersubharmonic resonance.

Received November 6, 1959

Yamanashi University,
Department of Mechanical Engineering,
Kofu, Japan

REFERENCES

1. Maezawa S., Proc. IUTAM Symposium on Nonlinear Vibration, Vol. 1, Kiev, 1961, p. 325.
2. Maezawa S., Bull. of JSME, **4**, *14*, 201 (1961).
3. Maezawa S., Acta Technica CSAV, **12**, *1*, 1 (1967).
4. Maezawa S., Proc. 16th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1966 (1968), p. 294.
5. Maezawa S., Proc. 4th Conference on Nonlinear Oscillations, Praha, 1967 (1968), p. 361.
6. Riesz F., *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
7. Meissner E., Schweiz. Bauzeitung, **72**, 95 (1918).
8. Whittaker E. T., Watson G. N., *Modern Analysis*. 4th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1935.
9. Magnus W., Winkler S., *Hill's Equation*. Interscience Publishers, New York, 1966.

STABILITATEA OSCILAȚIILOR FORȚATE ÎN SISTEMELE LINIARE PE PORȚIUNI, NESIMETRICE

(Rezumat)

Se stabilește un criteriu de stabilitate pentru mișcările forțate de regim permanent în diverse sisteme lineare pe porțiuni, cu caracteristici nesimetrice, sub acțiunea unei forțe perturbatoare armonice. Mișcările forțate de regim permanent includ rezonanță armonică, rezonanță superarmonică, rezonanță subarmonică și rezonanță super-subarmonică. Soluția se exprimă cu ajutorul unei serii Fourier perfecte iar ecuația în variații corespunzătoare este de tip Meissner, cu termen amortizant.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 532.58

DÉVELOPPEMENT DE LA TRANSITION DANS LE SILLAGE D'UN CYLINDRE PERPENDICULAIRE À UN ECOULEMENT SUPERSONIQUE

PAR

A. FAVRE, J. GAVIGLIO et H. BURNAGE

I. Introduction

I.1. But

La connaissance des mécanismes internes des sillages de corps se mouvant à grande vitesse s'étant avérée depuis quelques années trop limitée, de nombreuses recherches dont quelques unes sont citées [13], [10], [14] ... [16], [19], [12], [22], [21], [23], [20], [25] leur ont été consacrées dans le but de combler certaines lacunes. La difficulté majeure de cette étude réside dans la complexité même de la turbulence en régime compressible, qui se manifeste non seulement par des fluctuations de vitesse mais encore par des fluctuations de température et de pression et des corrélations entre ces trois modes. La détermination de la transition du régime laminaire au régime turbulent dans le sillage pose ainsi le problème de la reconnaissance même des différentes étapes de ce processus qui, lorsque l'anémomètre à fil chaude est utilisé, comme c'est le cas des mesures présentées dans ce mémoire, se traduit par un changement de nature des fluctuations auxquelles il est sensible. Une grande partie des travaux a été consacrée à l'étude des sillages en régime hypersonique. Les possibilités offertes par la soufflerie supersonique de l'I. M. S. T. et l'expérience déjà acquise en matière d'anémomètrie a fil chaud ont permis d'étudier la transition du sillage d'un cylindre de section circulaire perpendiculaire à un écoulement supersonique à Mach 2,3 [19], [20], [25].

Le but de cette publication est d'indiquer les méthodes mises en oeuvre pour détecter les différents stades de la transition et de caractériser son évolution lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement extérieur varie.

I.2. La soufflerie supersonique de l'I. M. S. T.

La soufflerie supersonique de l'I. M. S. T. (fig. 1), est à circuit de retour et fonctionnement continu; elle a déjà été décrite [19], [20], [18]. Elle est équipée de deux veines d'expériences pouvant être utilisées alternativement. Afin d'obtenir dans ces dernières un écoulement aussi peu préturbulent que possible des mesures ont été prises pour réduire à une valeur suffisamment faible la préturbulence:

a) de pression (mode acoustique), en disposant des pièges à bruit au long du circuit;

b) de température (mode entropique), par un échangeur de chaleur convenablement dessiné;

c) de vitesse, par sept filtres à mailles calibrées disposés dans la chambre de tranquillisation de chacune des veines d'expériences. Des mesures de contrôles effectuées dans l'écoulement libre des tuyères n'ont décelé que la présence d'ondes de bruit rayonnées par les couches limites des parois.

De plus l'étanchéité du circuit d'air permet le fonctionnement de la soufflerie sous vide partiel. Ceci est obtenu en faisant varier continûment la pression génératrice de 0,15 à 1,0 Atm., donc, le nombre de Reynolds dans la tuyère.

Une recirculation partielle du réfrigérant (eau) dans l'échangeur thermique permet également de régler la température génératrice de l'écoulement dans l'intervalle 20 °C a 45 °C environ. Ces deux dernières particularités rendent possible le tarage des anémomètres à fil chaud dans leurs conditions d'emploi [19], [18], [7].

Les mesures ont été effectuées dans la veine *S*8 (fig. 2) équipée d'une tuyère symétrique dont le nombre de Mach est 2,3. Les diverses dimensions de la tuyère sont indiquées sur le dessin. Les écarts sur le nombre de Mach sont inférieurs à 2% dans le rhombe de mesures. Toutes les expériences ont été faites à une température génératrice variant entre 20 °C et 25 °C. Pour une pression génératrice donnée, l'écart en résultant sur le nombre de Reynolds est inférieur à 1%. Au cours d'une même expérience dont la durée peut atteindre deux heures, la température génératrice ne varie pas de plus de 1 degré.

II. Méthodes d'étude de la transition dans les sillages

II. 1. Généralités

La configuration de l'écoulement supersonique autour d'un cylindre de section circulaire qui lui est perpendiculaire est présentée sur la fig. 3. Une onde de choc détachée se fixe en amont de la maquette et enveloppe l'ensemble du sillage. Les couches limites de la paroi du cylindre se détachent sous forme de couches libres à fort cisaillement et enferment une zone de recirculation dont la structure est encore mal connue. Au conflu-

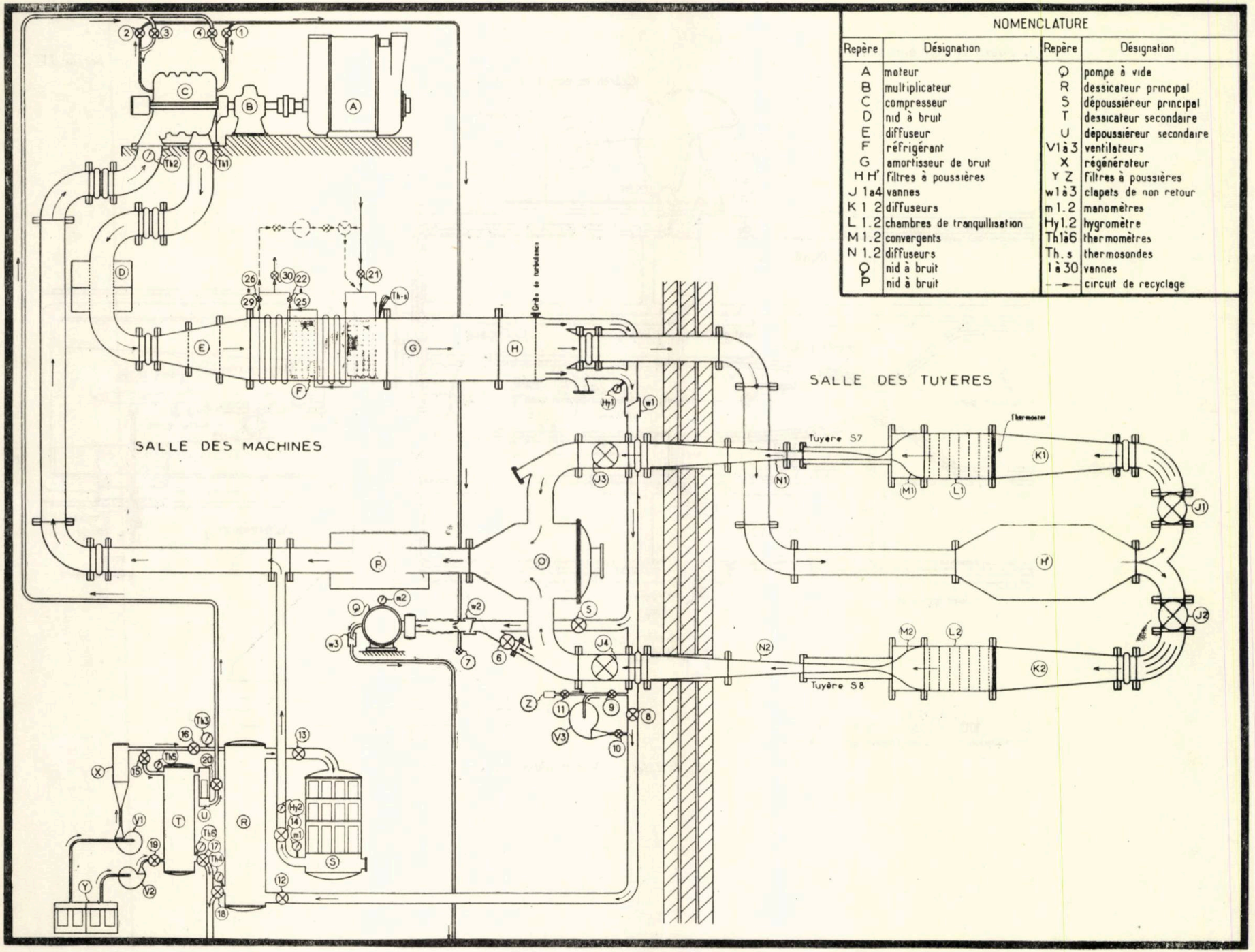


Fig. 1. — Schéma général de fonctionnement de la soufflerie supersonique.

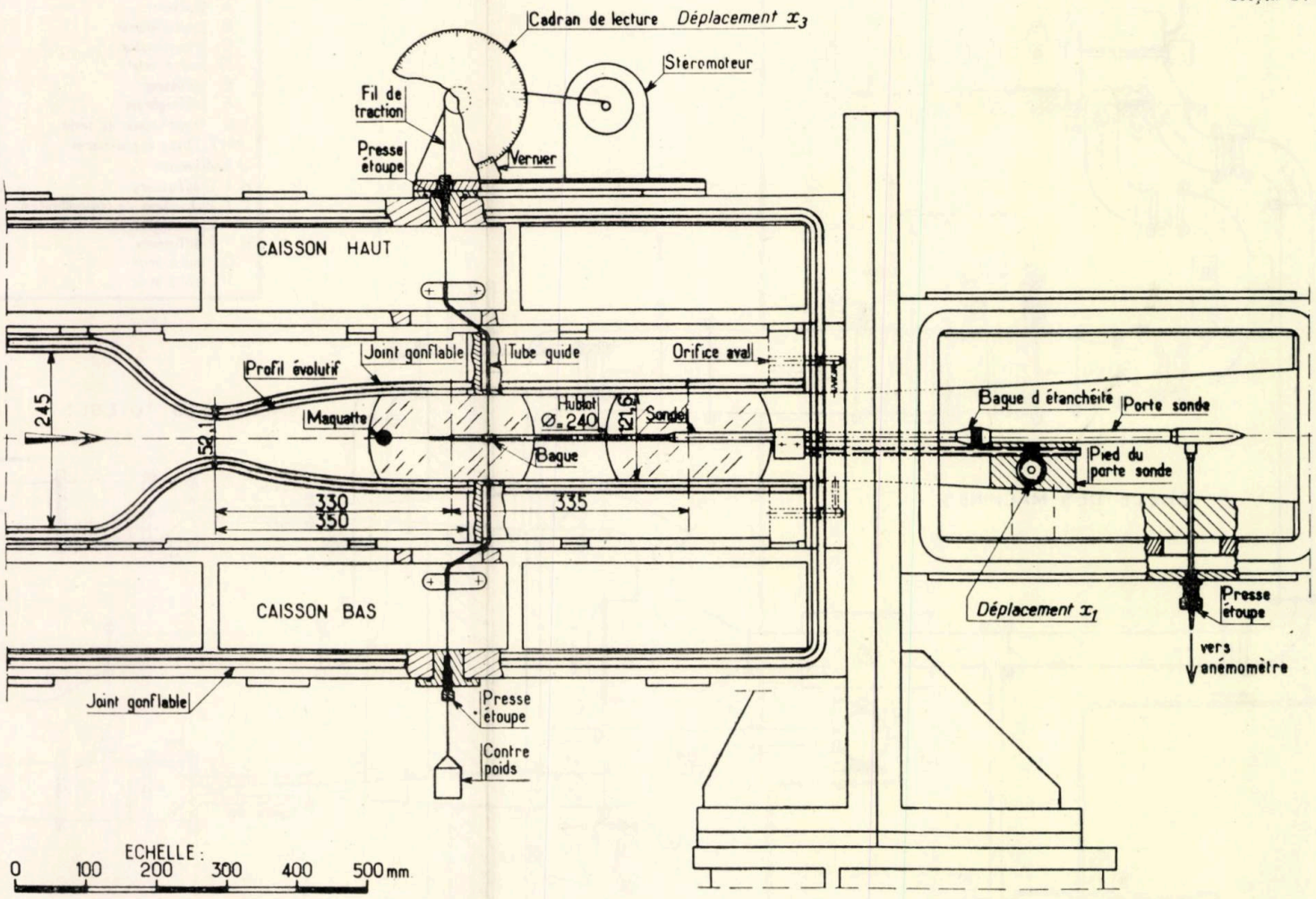


Fig. 2. — Veine d'experiences — *S8*.

ent des couches de mélange se forme le col du sillage visqueux qui s'étend vers l'aval. Le changement local de direction s'accompagne de part et d'autre du col d'une recompression dont la focalisation produit une onde de choc.

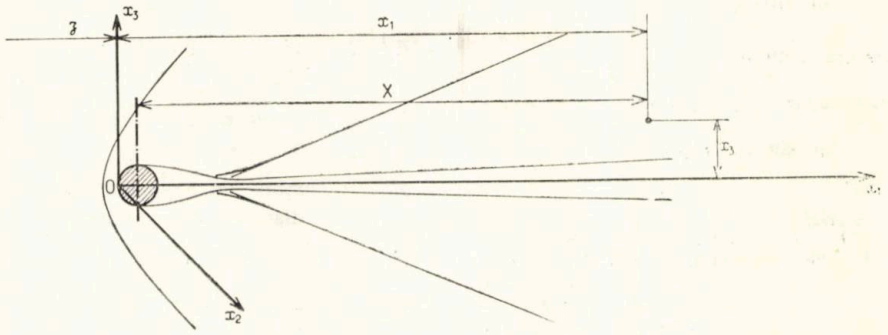


Fig. 3. — Sillage d'un cylindre perpendiculaire à un ecoulement supersonique.

Le sillage visqueux est la siège d'échanges de quantités de mouvement importants et passe sous certaines conditions de l'état laminaire à l'état turbulent. Le paramètre principal qui semble déterminer la transition est le nombre de Reynolds de l'écoulement extérieur au sillage, entourant la zone de transition. Comme dans le cas de la transition d'une couche limite, les instabilités laminaires de caractère spatio-temporel naissent dans une partie amont du sillage, puis augmentent en amplitude vers l'aval en se confinant dans une bande de fréquences relativement étroite. Des „bouffées" de turbulence aparaissent alors qui se distinguent par leur bande de fréquence beaucoup plus étendue et leur caractère dissipatif. Peu à peu le régime turbulent se propage vers l'aval et latéralement, et s'établit dans tout l'écoulement. Le problème de la détermination expérimentale de la transition consiste donc, en premier lieu, à définir dans la zone où elle se développe certaines caractéristiques qui permettent de localiser les étapes de sa progression, et ensuite à étudier l'évolution de l'ensemble de la zone de transition en fonction du nombre de Reynolds.

Notations

Trièdre de référence (voir fig. 3)

$e = E + e'$ — tension instantanée aux bornes du fil chaud

$\Delta E = e' = e'(t)$ — fluctuation de tension $(\overline{e'} = 0)$

$m = \overline{m} + \Delta m$ — quantité de mouvement à l'instant t

$\Delta m = \Delta m(t)$ — fluctuation de quantité de mouvement

$\overline{a_w} = (R_w - R_e)/R_e$ — coefficient de surchauffe du fil chaud

b — dimension transversale caractéristique du sillage

d — diamètre du cylindre

$\gamma - F/G$

s — dimension transversale caractéristique du sillage

t — temps courant

$F(m)$ — répartition spectrale de l'énergie du signal $\int_0^\infty F(n)\,dn = 1$

$F = \frac{\overline{m}}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)_{T_i}$ — sensibilité de l'anémomètre à fil chaud aux fluctuations de quantités de mouvement, la température d'arrêt étant constante

$G = \frac{T_i}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial T_i}\right)_{\overline{m}}$ — sensibilité de l'anémomètre à fil chaud aux fluctuations de température d'arrêt, la quantité de mouvement étant constante

i - courant de chauffage du fil chaud

M — nombre de Mach

$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial e'}{\partial t}\right)^2}\Big/\overline{e'^2}}$ — fréquence équivalente

$R(\tau) = \frac{\overline{e'(t)\,e'(t+\tau)}}{\overline{e'^2}}$ — coefficient d'autocorrélation

R_e, R_w — résistance du fil non chauffé, chauffé

$\mathfrak{R}_{\infty/mm}$ — nombre de Reynolds unitaire, conditions amont

$\mathfrak{R}_{d\infty}$ — nombre de Reynolds basé sur le diamètre du cylindre

T_i — température d'arrêt

X_{tr} — distance de transition

$\alpha = Ce'^2$ energie de signal électrique

α_c — énergie du signal électrique au centre du sillage

$\theta_* = \sqrt{\overline{e'^2}}/(EG)$

ρ — masee spécifique

τ — temps retard

$\varnothing$ — diamètre du fil chaud

II. 2. Critères de transition basés sur l'anémométrie par fil chaud

II. 1. 2. *L'anémomètre à fil chaud en écoulement supersonique*

Le fonctionnement de l'anémomètre à fil chaud en régime compressible a déja fait l'objet d'un certain nombre de publications [19], [2], [4], [5], [8], [11], [6]. On admet généralement que le fil est sensible aux fluctuations de quantité de mouvement et de température d'arrêt du fluide dans son voisinage immédiat, selon la loi:

$$(1) \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{e'}{E} = -F\frac{\Delta m}{\overline{m}} + G\frac{\Delta T_i}{T_i},$$

où $E = R_w i$ est la tension aux bornes du fil chaud dont la résistance est R_w et qui est parcouru par le courant constant i; F et G sont respectivement les sensibilités aux fluctuations de quantité de mouvement et de température d'arrêt qui ne dépendent, dans des conditions aérodynamiques données, que du courant de chauffage du fil.

En élevant au carré l'équation ci-dessus et en en prenant la moyenne, il vient

$$\theta_* = \left[\overline{\left(\frac{\Delta T_i}{\overline{T_i}}\right)^2} - 2\gamma \frac{\overline{\Delta m\, \Delta T_i}}{\overline{m}\,\overline{T_i}} + \gamma^2 \overline{\left(\frac{\Delta m}{\overline{m}}\right)^2}\right]^{1/2}, \tag{2}$$

avec $\gamma = F/G$ et $\theta_* = \sqrt{\overline{e'^2}}\,/\,(EG)$.

Le calcul ou un tarage préalable permet de déterminer la variation de F, G et γ en fonction de i. Un exemple de tarage est donné sur la fig. 4. L'élément sensible est un fil de Platine Rhodié de 2,5 μ de diamè-

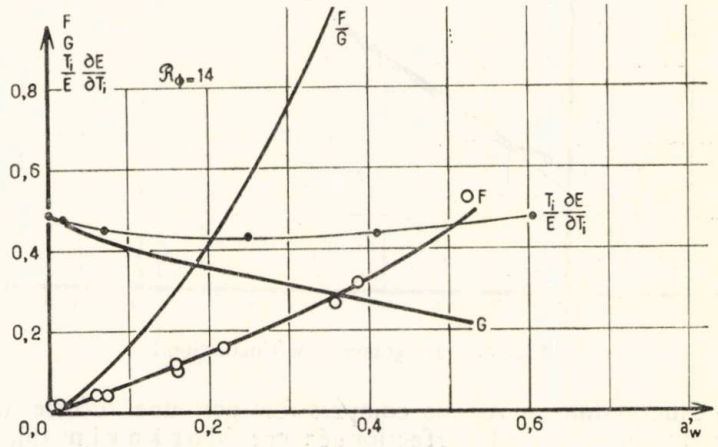


Fig. 4. — Sensiblités d'un anémomètre a fil chaud.
Pt. Rh. 10%, $\varnothing = 2{,}5\ \mu$, $l = 0{,}72$ mm.

tre et de longueur 0,72 mm, les sensibilités F, G et leur rapport sont portés en fonction du coefficient de surchauffe du fil $\overline{a'_w}$ qui croît de façon monotone en fonction de i:

$$\overline{a'_w} = \frac{R_w - R_e}{R_e}, \tag{3}$$

où R_e représente la résistance du fil non chauffé. Pour un certain nombre de valeurs de $\overline{a'_w}$, $\overline{e'^2}$ et E sont mesurés directement et donnent θ_*. La courbe $\theta_*(\gamma)$ est une hyperbole dont la géométrie détermine les valeurs de

$$\overline{\left(\frac{\Delta T_i}{\overline{T_i}}\right)^2},\quad \overline{\left(\frac{\Delta m}{\overline{m}}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\Delta m\, \Delta T_i}}{\overline{m}\,\overline{T_i}}.$$

La fig. 5 montre par exemple un „diagramme de fluctuation". La sonde est placée dans le plan médian du sillage du cylindre de 4 mm de diamètre, à la distance $X/d = 12{,}5$. Ces quantités sont reliées aux trois

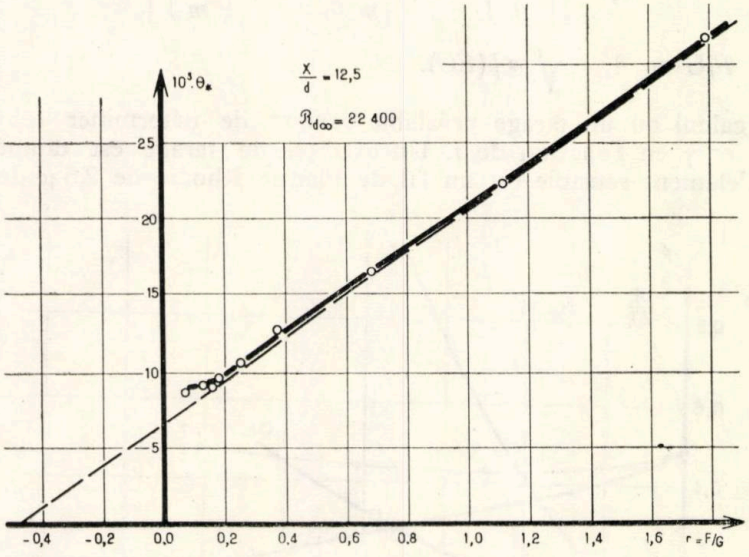


Fig. 5. — Diagramme de fluctuations.

modes de fluctuation en régime compressible par une théorie dûe à Kovasznay [4] et plus tard perfectionnée par Morkovin [5], dont l'exposé sort du cadre de ce mémoire.

Il est souvent commode, pour pouvoir comparer certains résultats de mesures, de faire fonctionner l'anémomètre à fil chaud, en maintenant constant le coefficient de surchauffe $\overline{a'_w}$. Ceci présente l'avantage de conserver au rapport des sensibilités F et G une valeur fixe et d'obtenir dans certains cas une mesure globale plus représentative du phénomène. On distinguera par la suite les résultats obtenus en gardant constant soit le courant de chauffage, soit le coefficient de surchauffe.

II.2.2. *Nature des signaux agissant sur l'anémomètre*

Lorsque le fil chaud est placé dans un sillage en transition, le signal électrique aux bornes de l'anémomètre peut-être dû:

a) à des oscillations de prétransition qui sont des fluctuations dont l'écoulement laminaire est le siège. Ces oscillations se caractérisent par leur amplitude qui augmente vers l'aval du sillage, et leur bande de fréquence qui n'excède pas quelques dizaines de kilohertz;

b) aux signaux d'intermittence de frontière ou de transition qui modulent le signal turbulent et dont la description fait l'objet d'une autre publication [24];

c) aux fluctuations turbulentes appartenant aux modes rotationnel entropique et acoustique, qui se distinguent par l'étendue plus grande de leur spectre d'énergie (plusieurs centaines de kilohertz) et la nature dissipative de celles appartenant au mode rotationnel;

d) à des signaux induits par une instabilité spatiale éventuelle du sillage sur l'anémomètre à fil chaud qui est fixé par rapport au trièdre de référence; ces signaux comme ceux décrits en a) et b) présentent un spectre d'énergie compris entre 0 et quelques dizaines de kilocycles.

Il résulte de l'énumération précédente que l'étendue du spectre d'énergie du signal permet de déceler la présence éventuelle des signaux turbulents de nature c) dans la fluctuation globale aux bornes de l'anémomètre. Cette considération constitue le principe de l'un des critères de transition décrit plus loin.

II. 2.3. *Critère basé sur l'analyse spectrale ou l'autocorrélation*

L'évolution du spectre d'énergie lorsque le fil chaud est déplacé vers l'aval dans le plan médian du sillage, montre la participation de plus en plus importante des composants à haute fréquence du signal qui est caractérisée par une diminution du rayon de courbure au sommet des courbes d'autocorrélation. On peut tenter de décrire quantitativement ce phénomène par la fréquence équivalente N definie par la relation:

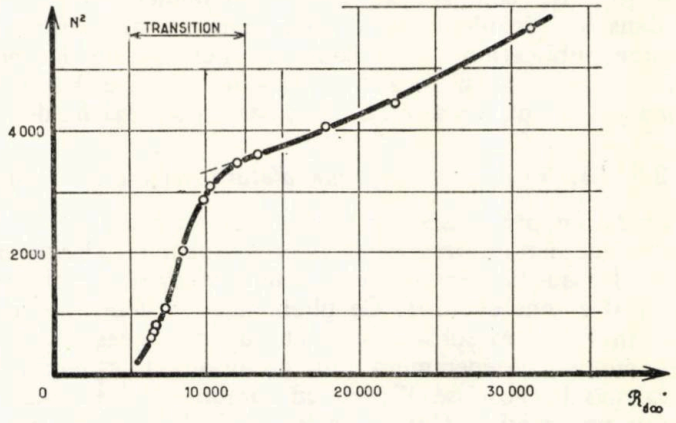


Fig. 6. – Fréquence équivalente: effect du nombre de Reynolds. $X = 70$ mm.

$$(4) \qquad N^2 = \int_0^\infty n^2 F(n)\, dn = \frac{1}{4\pi^2 \overline{e'^2}} \overline{\left(\frac{\partial e'}{\partial t}\right)^2}.$$

Dans la partie laminaire de l'écoulement N doit être faible: il doit augmenter dans la zone de transition vers un état peu évolutif lorsque la turbulence est pleinement développée. Ceci est confirmé par l'expérience qui peut-être effectuée soit en maintenant constant le nombre de Reynolds et en déplaçant la sonde de l'anémomètre longitudinalement dans le plan médian du sillage, soit en fixant la position de la sonde à fil chaud et en faisant varier le nombre de Reynolds, comme dans le cas de la fig. 6 qui est donnée en exemple. Dans ce cas particulier la sonde est placée à $X = 70$ mm et le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{d\infty}$ croît de 5.000 à 38.000. L'extrapolation de la partie rapidement ascendante de la courbe détermine un stade initial de la transition et le changement de courbure au voisinage de $\mathcal{R}_{d\infty} = 10.000$ en marque un stade final. Une justification détaillée de ces considérations peut-être trouvée en [24].

II. 2.4. *Critère de Démétriadès*

Lorsque l'on déplace longitudinalement vers l'aval un anémomètre à fil chaud parcouru par un courant constant dans le plan médian d'un sillage en transition on constate que la valeur quadratique moyenne de la tension relevée à ses bornes, très faible dans la partie laminaire, croît rapidement, passe par un maximum puis décroît lentement. Démétriadès [10] considère l'abscisse du maximum comme caractéristique de la zone de transition. Cette constatation peut-être rapprochée de mesures effectuées dans une couche limite supersonique en transition par Laufer et Vrebalovitch [9]. La comparaison de ce phénomène avec celui observé notamment dans les écoulements de conduite en transition fera l'objet d'une prochaine publication [24]. Pour un nombre de Reynolds donné, l'abscisse du maximum ainsi localisée se situant entre les points définis au paragraphe précédent, caractérise un stade intermédiaire de la transition.

II. 2.5. *Critère basé sur le taux d'élargissement du sillage*

L'augmentation progressive de turbulence au cours de la transition et la présence de fluctuations transversales provoquent un élargissement rapide du sillage qui, lorsque le régime pleinement développé est atteint, tend vers un état plus faiblement évolutif. Ce phénomène déjà observé dans la transition des couches limites subsoniques et supersoniques [9] peut-être mis en évidence comme précédemment soit en mesurant la largeur du sillage en diverses valeurs de l'abscisse X pour un nombre de Reynolds donné, soit en notant pour une station fixe la variation de la largeur lorsque le nombre de Reynolds augmente. Ce qui est le cas de la fig. 7. Un stade final de la transition paraît ainsi pouvoir être déterminé.

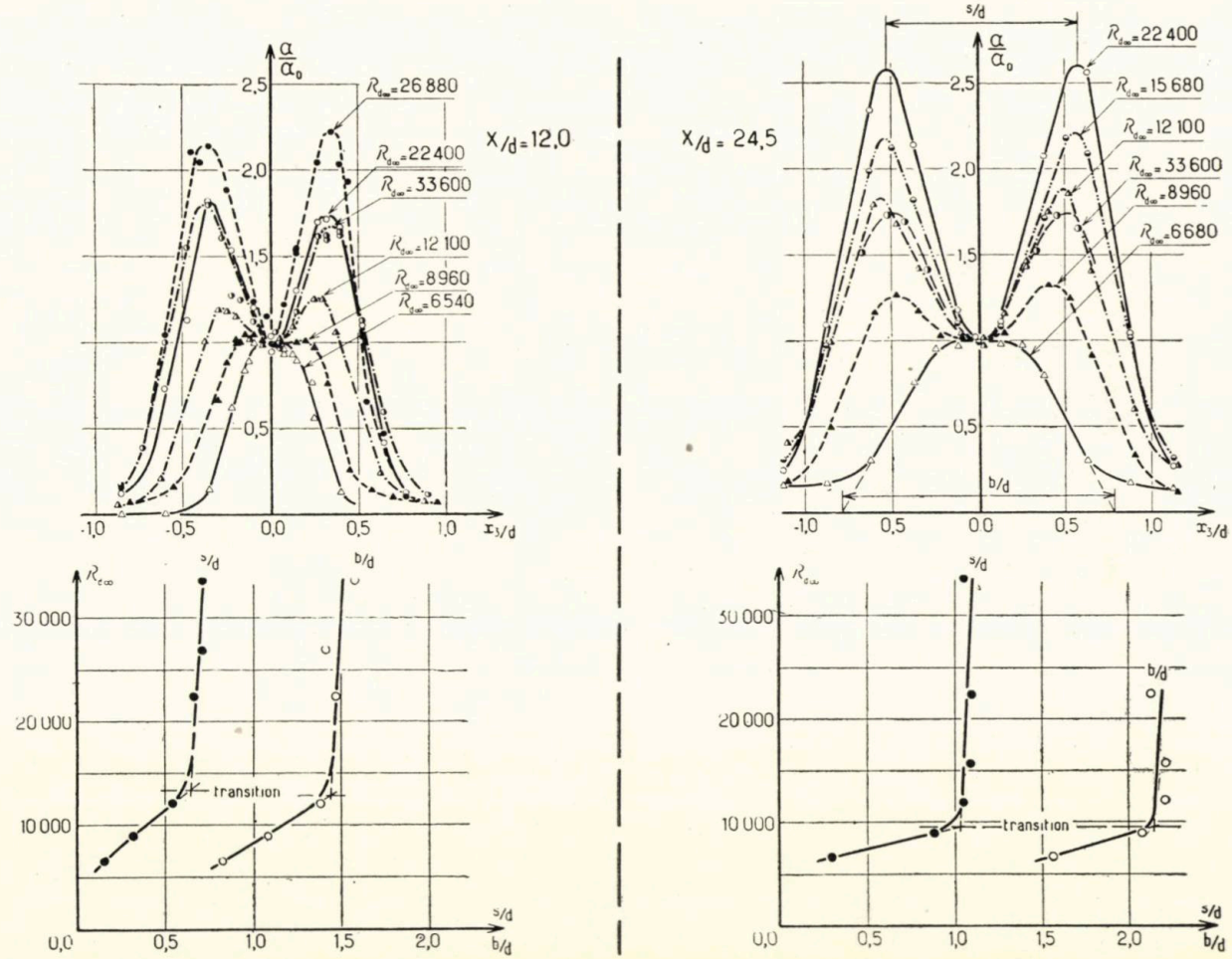
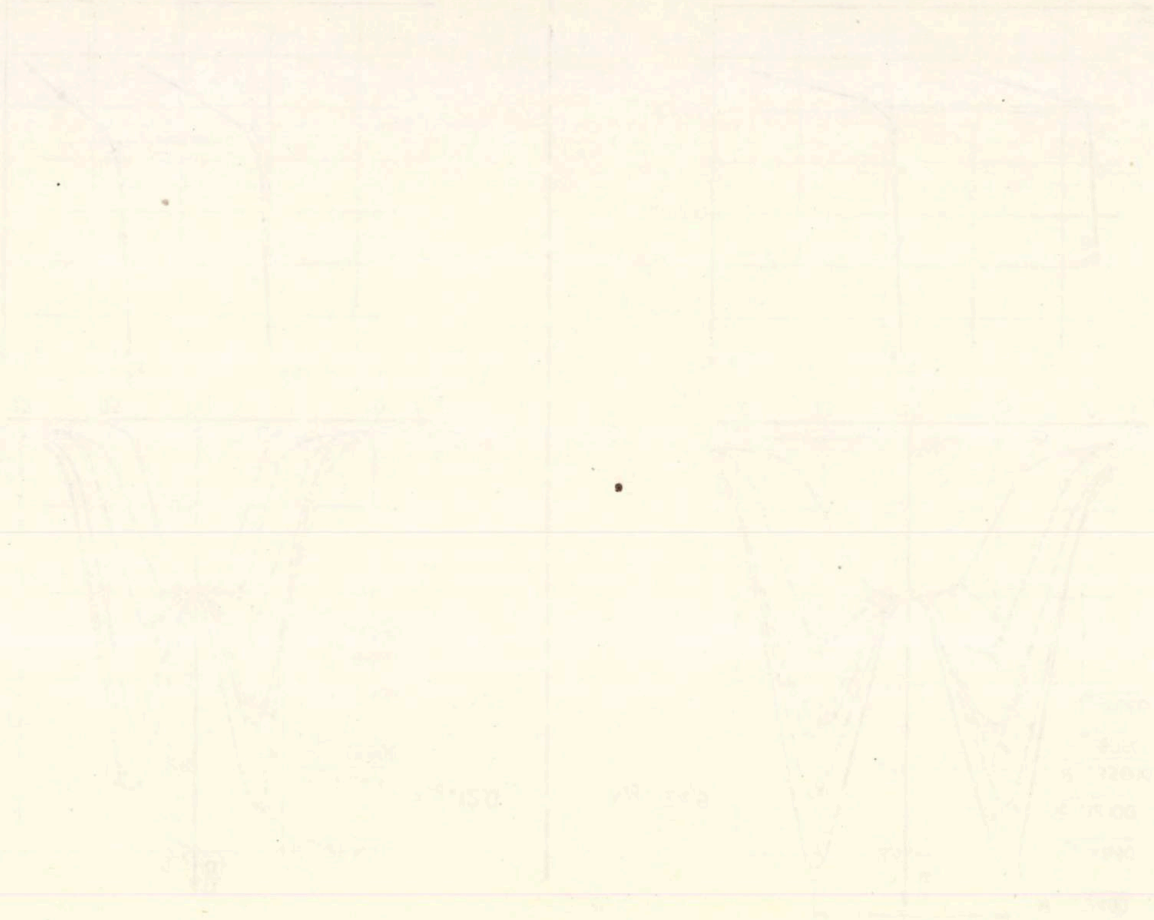


Fig. 7. — Énergie du signal décelé par l'anémomètre à fil chaud; largeur du sillage.



Dans le cas de ces expériences, les largeurs de sillage ont été mesurées en relevant les courbes $\overline{e'^2}(X_3/d)$ dont l'allure rappelle celles obtenues dans les sillages subsoniques et en extrapolant les flancs des courbes comme indiqué sur la figure. Une autre dimension caractéristique paraît être la distance S séparant les sommets. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont présentés sur la fig. 7 et indiquent à la précision près des expériences que le même nombre de Reynolds correspond au changement de pente caractéristique des courbes s/d et b/d.

III. Dispositif experimental

III. 1. Anémomètre à fil chaud

La matériau le plus utilisé pour réaliser les sondes anémométriques a été le Tungstene recouvert de Platine, de diamètre 5 microns, la longueur de l'élément sensible étant en moyenne de 1,0 mm.

La fluctuation de tension électrique relevée aux bornes de l'anémomètre est amplifiée, et l'effet de l'inertie thermique du fil chaud compensé par une chaîne d'amplification appropriée [1]) [19], [20] dont la bande passante nominale a — 3 db s'étend de 0,1 Hz à 320 KHz. Dans le cas de ces expériences, elle a été réduite à 73 KHz puis portée à 105 KHz. Un appareil déjà décrit [7], [17], [19] équipé d'une ligne à retard [2]) (0, à 200

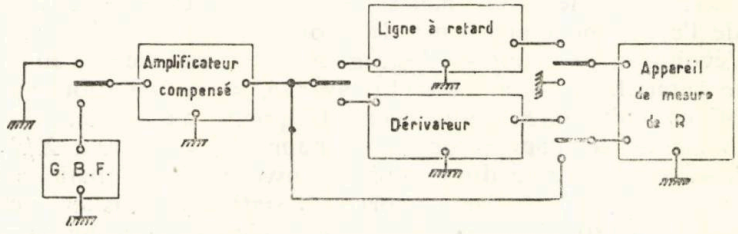


Fig. 8. — Mesure de l'énergie du signal turbulent.

μsec.) permet de mesurer directement le coefficient d'autocorrélation. Au précédent appareil a été adjoint un circuit électrique de différentiation pour la mesure de $\overline{(\partial e'/\partial t)^2}$. La fig. 8 montre la disposition des divers éléments constituant la chaîne de mesures.

---

[1]) Shpiro et Edwards Model 50.
[2]) Ad yu Electronics.

III. 2. Strioscopie

L'écoulement peut-être visualisé par un appareil de strioscopie à double traversée de haute sensibilité [19] donnant une image suffisamment contrastée à la plus faible pression génératrice (0,15 at.)

III. 3. Maquette

On étudie le sillage en aval d'un cylindre à section circulaire de diamètre $d = 4$ mm maintenu perpendiculairement à l'écoulement par des fils de suspension tendus en amont et en aval dans les couches limites des parois latérales de la tuyère. La surface de la maquette est polie.

IV. Résultats de mesures

IV. 1. Micro échelle de turbulence

La fig. 9 montre l'évolution des courbes d'autocorrélation du signal électrique obtenu en plaçant la sonde en deux points situés sur l'axe du sillage respectivement à $X/d = 12{,}0$ et $X/d = 24{,}5$ lorsque le nombre de Reynolds augmente. Pour $\mathcal{R}_{d\infty} = 6.540$ dans les deux cas, l'autocorrélation se maintient à un niveau élevé exprimant ainsi que la contribution au spectre d'énergie des fluctuation à basse fréquence et prépondérante. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le rayon de courbure à l'origine des courbes diminue comme le montre la fig. 10 qui représente les mêmes courbes a $X/d = 12$, mais avec dilatation de l'échelle des τ. La fréquence de la sinusoïde osculatrice à l'origine croît donc, traduisant l'extension du spectre d'énergie vers les plus hautes fréquences. Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente, le début de la transition recule vers l'amont. L'évolution des courbes des fig. 9 et 10 montre qu'au fur et à mesure que l'état de transition est plus avancé, la contribution au spectre des fluctuations turbulentes à plus haute fréquence augmente.

En comparant les courbes obtenues pour $\mathcal{R}_{d\infty} = 6.540$ à $X/d = 12$ et $X/d = 24{,}5$ on constate une diminution du niveau des oscillations à basse fréquence pour $X/d = 24{,}5$ par rapport à la station la plus en amont; de plus pour $\mathcal{R}_{d\infty} = 12.100$, à la station la plus éloignée, le rayon de courbure à l'origine est plus faible. Ces différentes constatations paraissent compatibles avec les considérations exposées plus haut (**II.2.2.**)

IV. 2. Fréquence équivalente

Dans le cas de ces expériences, il est possible de mesurer directement la fréquence de la sinusoïde osculatrice aux sommets des courbes d'autocorrélation au moyen d'un filtre dérivateur passif [20] et [3].

À titre de comparaison la fig. 11 montre deux courbes $N_2(\mathcal{R}_{d\infty})$ obtenues pour $X/d = 24{,}5$ à l'aide du dérivateur pour deux séries de mesures différentes et par mesure directe du rayon de courbure au sommet

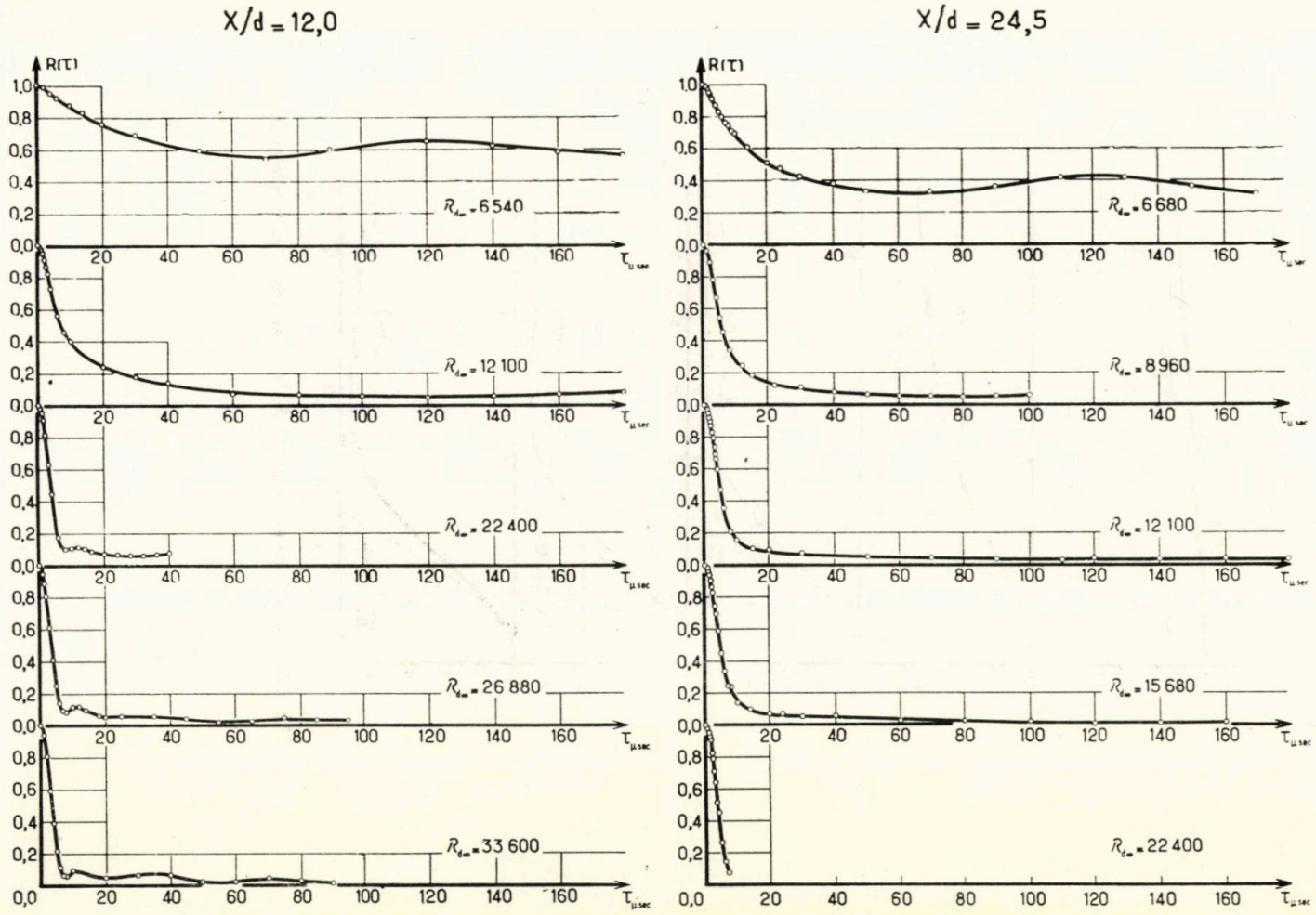


Fig. 9. — Autocorrélation dans le sillage — effet du nombre de Reynolds.

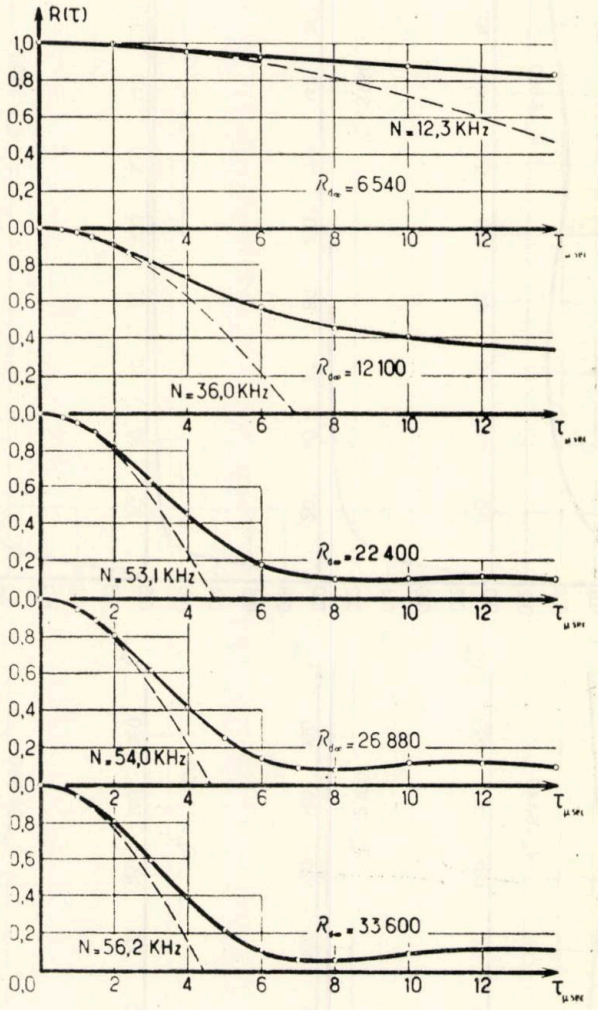


Fig. 10. — Courbure au sommet de la fonction d'autocorrélation.

des courbes d'autocorrélation. On observe une certaine différence pour le début de la transition et un écart approximativement égal sur la détermination du stade final. Cette comparaison fournit un exemple de la dispersion des points de mesures. Si le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{d\infty}$ est constant et

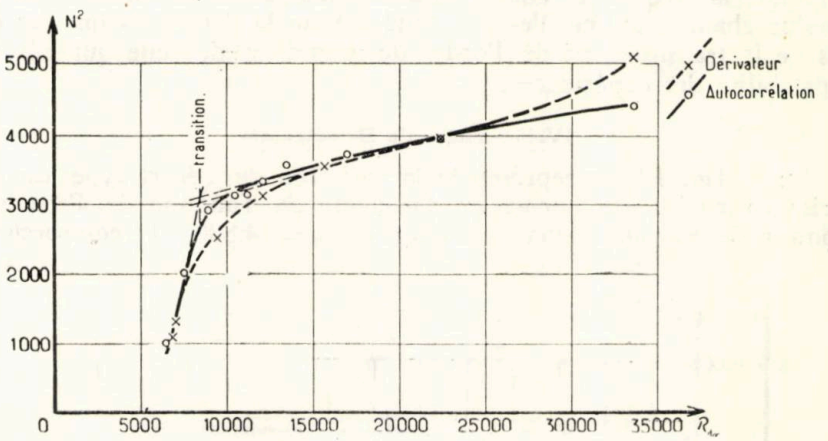


Fig. 11. — Détermination d'un nombre de Reynolds de transition. $X/d = 24{,}5$.

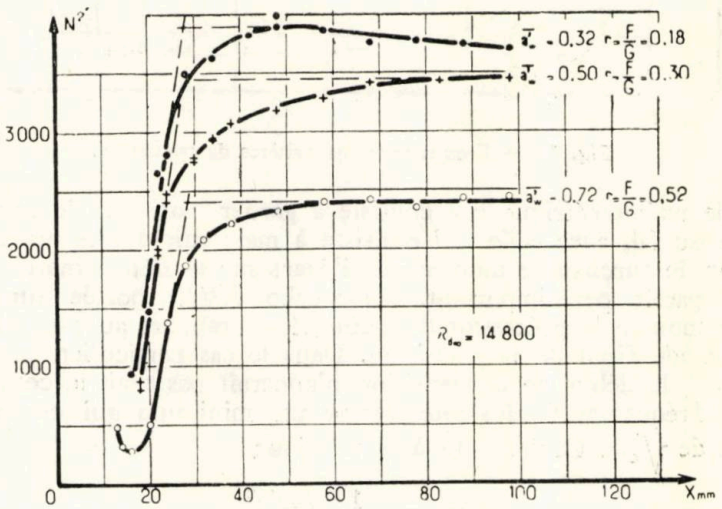


Fig. 12. — Influence du rapport des sensibilités de l'anémomètre.

que la sonde à fil chaud est translatée sur l'axe des X, la variation de la fréquence équivalente correspondante observée, fait l'objet de la fig. 12 relative à un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{d\infty} = 14.800$. Un contrôle de l'influence du coefficient de surchauffe du fil $\bar{a}'_w$ sur la variation du N^2 montre que la fréquence équivalente est d'autant plus élevée que le fil est moins chauffé et que l'erreur commise sur la détermination des divers stades de la transition est de l'ordre de grandeur de celle qui résulte de la répétabilité des expériences.

IV. 3. Critère de Démétriadès

Sur la fig. 13 est représentée la variation de l'écart type du signal électrique recueilli aux bornes du fil chaud en fonction de l'abscisse X, le nombre de Reynolds étant constant ($\mathcal{R}_{d\infty} = 14.800$), la comparaison de

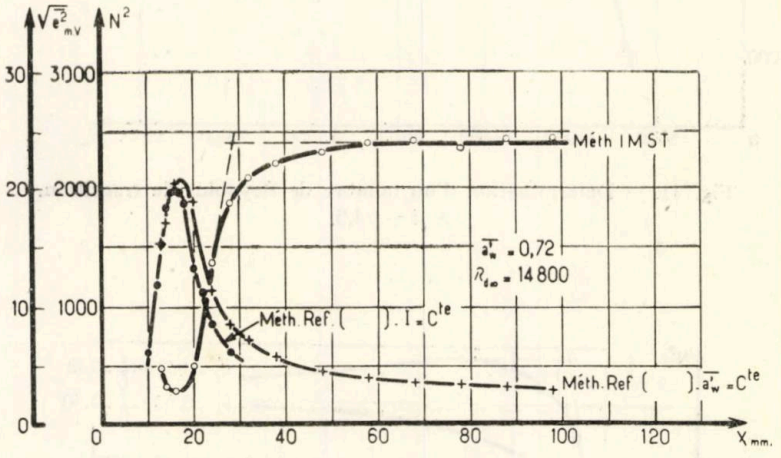


Fig. 13. — Comparaison de critères de transition.

la méthode anémométrique qui consiste à garder constant le courant i de chauffage du fil, avec celle qui consiste à maintenir à une valeur fixe le coefficient de surchauffe montre que l'écart sur la détermination du maximum A paraît peu important. La courbe $N^2(X)$ portée sur le même graphique montre la précession du point A par rapport au point B qui indique un stade final de la transition. Dans le cas particulier présenté sur cette figure, le début de la transition n'apparaît pas mais la courbe représentant la fréquence équivalente accuse un minimum qui correspond au maximum de $\sqrt{\overline{e'^2}}$. Ceci est dû à la relation:

$$N^2 = \frac{1}{4\pi^2 \overline{e'^2}} \overline{\left(\frac{\partial e'}{\partial t}\right)^2}. \tag{5}$$

IV. 4. Largeur du sillage

Selon la fig. 7, aux distances $X/d = 12{,}0$ et $X/d = 24{,}5$, les nombres de Reynolds marquant la fin de la transition sont respectivement $\mathcal{R}_{d\infty} = 9.400$ et 13.000.

IV. 5. Récapitulation des résultats

L'ensemble des mesures décrites ci-dessus est récapitulé sur la fig. 14 où sont rapportés les points correspondant au début, au critère de Démétriadès, et au stade final de la transition: les modalités d'application des méthodes utilisées (X constant ou $\mathcal{R}_{d\infty}$ constant, largeur du sillage, etc.) ne sont pas distinguées. La distance de transition X en millimètres est représentée en fonction de l'inverse du nombre de Reynolds de l'écoulement extérieur $\mathcal{R}_{\infty/mm}$. Le plan de la figure est essentiellement partagé

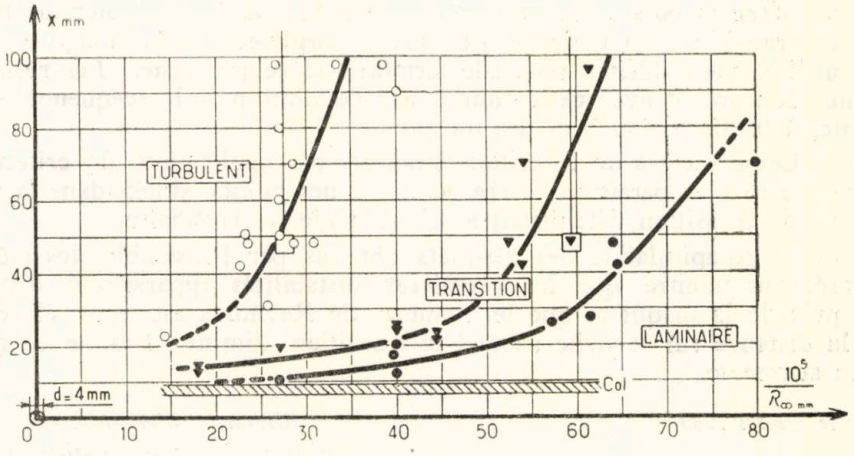


Fig. 14. — Récapitulation des résultats.

en trois régions: une région pour laquelle l'écoulement est laminaire, une région où la turbulence est pleinement développée et une zone comprise entre les deux précédentes qui est le domaine dans lequel se développe la transition. Dans le cas des présentes mesures, le début de la transition paraît avoir lieu au voisinage du cylindre pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{d\infty}$ d'environ 20.000. La distance sur laquelle s'étend la transition augmente rapidement lorsque le nombre de Reynolds diminue. La courbe

établie en utilisant le critère de Démétriadès se place dans le domaine de la transition et évolue de façon analogue à celles délimitant ce dernier.

V. Conclusions

1. Des methodes nouvelles permettant de décrire le développement de la transition de sillages de cylindres sont proposées et mises en oeuvre, et les résultats qu'elles donnent sont comparés à ceux obtenus par un critère déjà connu. L'importance relative de la partie à plus haute fréquence du spectre d'énergie du signal électrique recueilli aux bornes du fil chaud est mise en évidence et mesurée en étudiant l'évolution du rayon de courbure au sommet des courbes l'autocorrélation ou en mesurant la valeur quadratique moyenne de la dérivée temporelle du signal électrique et du signal lui-même, ce qui permet d'obtenir la même information.

2. Les résultats obtenus permettent aussi de déterminer, pour un écoulement à nombre de Reynolds donné, la distance longitudinale du cylindre à partir de laquelle les fluctuations apparaissent, l'étendue sur laquelle leur énergie augmente et la position à laquelle cette croissance rapide cesse; ceci offre la possibilité de localiser le début, la fin et l'étendue de la zone de transition. La variation du taux d'élargissement du sillage est encore utilisée pour définir un stade terminal de ce processus. Les résultats obtenus concordent avec ceux donnés par l'évolution de la fréquence équivalente, à la dispersion près des mesures.

3. Les distances de transition mesurées par application du critère de Démétriadès paraissent correspondre à des points situés dans la zone centrale de transition définissant ainsi un stade intermédiaire.

4. La récapitulation des résultats obtenus par l'ensemble des méthodes précitées montre que les premières instabilités apparaissent d'autant plus près de la maquette que le nombre de Reynolds est plus élevé; et que la distance sur laquelle s'étend la transition diminue lorsque ce paramètre augmente.

Reçue le 6 mars 1969

Université d'Aix-Marseille,
Institut de Mécanique statistique de la Turbulence, Marseille, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Martinot-Lagarde A., *Introduction au spectre de la turbulence.* NT. GRA, Paris, *55* (1946).
2. Kovasznay L. S. G., *The Hot Wire Anemometer in Supersonic Flow.* J. H. U. J. Ae. Sc., Baltimore, **17**, *9* (September 1950).
3. Liepmann H., Laufer J., Liepmann K., *On the Spectrum of Isotropic Turbulence.* N. T. NACA, *2473* (1951).

4. Kovasznay L. S. G., *Turbulence in Supersonic Flow.* J. H.U.J. Ae. Sc., Baltimore, **20,** *10* (October 1953).

5. Morkovin M. V., *Fluctuations and Hot Wire Anemometry in Compressible Flows.* J.H.U., Baltimore (June 1956).

6. Laufer J., Mc Clellan R., *Measurement of Heat Transfer from fine Wires in Supersonic Flows.* J. Fl. Mech., **1,** Part *3* (September 1956).

7. Gaviglio J., *Sur quelques problèmes de mesures de turbulence effectuées à l'aide de l'anémomètre è fils chauds parcourus par un courant d'intensité constante.* Thèse Doctorat d'État, Marseille (1958) (PST n° *385* — 1962).

8. Morkovin M. V., Phinney R. E., *Extended Applications of Hot Wire Anemometry to High Speed Turbulent Boundary Layers.* J.H.U., Baltimore (June 1958).

9. Laufer J., Vrebalovitch T., *Stability and Transition of a Supersonic Laminar Boundary Layer on an Insulated Flat Plate.* J. Fl. Mech., **9,** *2* (1960).

10. Démétriadès A., *Some Hot Wire Anemometer Measurements in Hypersonic Wakes.* Proc. of Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. (1961).

11. Vrebalovitch T., *Application of Hot Wire Technique in Unsteady Compressible Flow.* J.P.L., Pasadena (May 1962).

12. Mc Carthy J. F., *Hypersonic Wakes.* C. I. T. Grad. Aero Lab., Mem. *67* (July 1962).

13. Démétriadès A., Gold H., *Correlation of Blunt Bluff Body Wake Transition Data.* Firestone Flight Sciences Lab. C. I. T., Pasadena, Int. mem. *2* (September 1962).

14. Kendall J. M., *Experimental Studies of Cylindre and Sphere Wakes at M = 3,7.* J. P. L. (November 1962).

15. Lees L., *Hypersonic Wakes and Trails.* A. I. A. A. J., **2,** *3* (March 1964).

16. Pallone A., Erdös J., Eckerman J., *Hypersonic Wakes and Transition Studies.* A. I. A. A. J., **2,** *5* (May 1964).

17. Favre A., Gaviglio J., *Appareil analogique de mesure de la corrélation dans le temps.* Colloque sur le traitement statistique des mesures. Grenoble, 1966; L'onde électrique, *475* (octobre 1966).

18. Bernard J. F., *Contribution à l'étude de quelques caractéristiques d'un tunnel supersonique à faible turbulence (soufflerie supersonique).* Thèse de Docteur Ingénieur, Marseille (novembre 1966).

19. Gaviglio J., Burnage H., *Observation en souflerie de sillages dans un écoulement supersonique par strioscopie et anémométrie à fils chauds.* A. F. I. T. Ae., 3° Colloque Aéro. Appli. (novembre 1966).

20. Favre A., Gaviglio J., Burnage H., *Observations sur la transition dans un sillage en écoulement supersonique.* La Recherche Aérospatiale, *119* (juillet-août 1967).

21. Behrens W., *The Far Wake Behind Cylinders at Hypersonic Speeds.* (I) *Flow Field,* A. I. A. A. J., **5,** *12* (December 1967).

22. Fox J., *Space Correlation Measurements in the Fluctuations Turbulent Wakes Behind Projectiles.* A. A. I. A. J., **6,** *2* (February 1968).

23. Behrens W., *Far Wake Behind Cylinders at Hypersonic Speeds.* (II) *Stability.* A. I. A. A. J., **6,** *2* (February 1968).

24. Gaviglio J., Burnage H., *Quelques résultats concernant l'intermittence dans divers écoulements* (en préparation).

25. Favre A., Gaviglio J., Burnage H., *Transition dans un sillage en écoulement supersonique. Nouvelles observations.* La Recherche Aérospatiale (à paraître).

DEZVOLTAREA TRANZIȚIEI ÎN URMA UNUI CILINDRU PERPENDICULAR PE O CURGERE SUPERSONICĂ

(Rezumat)

Utilizînd sufleria supersonică a Institutului de Mecanică Statistică a turbulenței din Marsilia, în [19], [20] și [25] s-a studiat tranziția în urma unui cilindru de secțiune circulară, perpendicular pe o curgere supersonică la Mach 2,3. În lucrarea de față se indică metodele noi elaborate pentru descrierea tranziției în urma cilindrului și se analizează rezultatele ce se obțin, comparîndu-le cu cele date de un criteriu cunoscut. Metodele propuse permit detectarea diferitelor stadii ale tranziției și caracterizarea evoluției sale la variația numărului Reynolds al curgerii exterioare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 536.24

LOCAL HEAT TRANSFER BY FLOWING GAS—SOLIDS SUSPENSIONS IN TUBES

BY

I. CURIEVICI and HORIA DINULESCU

1. Introduction

The local variation of heat transfer associated with flow of gases bearing suspended solid materials is much more important than that with clean gases. The study of the local heat transfer characteristics is therefore essential both for the fundamental understanding of the phenomenon and for the adequate design of the industrial systems using gas — solids suspensions as heat transfer media. Although the existing data were insufficient and somewhat contradictory, empirical correlations were developed for several limited domains of governing parameters.

In the present work, the available literature on local heat transfer by gas—solids suspensions in circular tubes, was reviewed and analyzed. In the range of particle sizes smaller than $10\,\mu$, the most important for the industrial application of the suspensions as heat improving agents, a unique correlation was derived for practical use in predicting local heat transfer coefficients.

Nomenclature

T_0	— tube wall temperature	$\mathcal{P}_r$	— Prandtl number
T_b	— local bulk temperature	G	— mass flow rate
$r=G_p/G_g$	— solids loading ratio (solids concentration)	D	— tube diameter
c_p	— specific heat of solid	L	— tube length
c_g	— specific heat of gas at constant pressure	d	— mean particle size
$\mathcal{R}_e$	— Reynolds number	x	— axial distance
$\mathcal{N}_u$	— Nusselt number	ψ	— distance factor

Suffices

p — particle, s — suspension, g — gas, ∞ — assymptotic values

2. Data Sources

The discussion in the present paper is based upon the results of the works briefly summarized below. The experimental data of these works were obtained by heating the suspension in constant heat flux tubes. The most representative data of the different authors were shown on a common graph in Fig. 1, and the corresponding experimental conditions were summarized in Table 1.

Hawes, Holland, Kirby and Waller [5]. The local heat transfer coefficients were measured for a nitrogen—graphite suspension with particle dimensions smaller than 10 μ, in a tube 12.7 mm diameter and 40 diameters long. The pressure in the system was nearly atmospheric and the Roynolds number ranged from 8000 to 35000. The solids loading ratio varied between 10 and 50. The experimental data were correlated by the following equation:

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = \left[0.71 + 0.125\frac{c_p}{c_g} - 0.001\left(r\frac{c_p}{c_g}\right)^2\right]\left[1 + 0.15\left(\frac{T_0}{T_{bs}} - 1\right)\right] \times \times \left(1 + 0.6\, e^{-0.085\frac{X}{D}}\right). \tag{1}$$

The heat flux was made to vary in order to study the effect of the temperature ratio T_0/T_{bs}. Eq. (1) was represented in Figs. 1 and 2 for a temperature ratio close to that in the other works.

Sukomel, Tsvetkov, Kerimov [6]. Local heat transfer coefficients were reported for suspensions in air, nitrogen and helium of graphite with mean particle dimensions of 65 μ, 130 μ, 180 μ and 290 μ and aluminium oxide of 70 μ. The heat transfer tube was 8.16 mm diameter and 80 diameters long. The tests were mainly carried out at temperature differences of 30...60°C and Reynolds numbers from 8000 to 35000. The solids loading ratio varied between 0 and 40. For $r \geqslant 3$ the data for the 65 μ particles were correlated by the expression:

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = 0.55\left(\frac{c_p}{c_g}\right)^{0.1} r^{0.33}\left(1 + 0.7\, e^{-0.045\frac{X}{D}}\right) \tag{2}$$

and those for the particles from 130 μ to 290 μ by the expression:

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = 0.55\left(\frac{c_p}{c_g}\right)^{0.1} r^{0.25}\left(1 + 0.35\, e^{-0.040\frac{X}{D}}\right). \tag{3}$$

Schluderberg, Whitelaw and Carlson [1]. The data presented comprise a wide range of experimental conditions. Mean heat transfer coefficients for suspensions of 1 to 5 μ graphite particles in carbon dioxide, helium, nitrogen and carbon tetrafluoride were measured at gas pressures between 2 and 9 ata, gas temperatures between 30°C and 600°C, and solids loading ratio of up to 90. The heat transfer data for tube inside

diameters from 8 to 22 mm, tube lengths from 100 to 289 diameters, and Reynolds numbers from 2000 to 400000 were correlated by the following equation:

$$\mathcal{N}u_s = 0.02\,\mathcal{R}e_g^{0.8}\,\mathcal{P}r^{0.8}\left(1 + r\frac{c_p}{c_g}\right)^{0.45}, \tag{4}$$

which devided by the clean gas heat transfer equation, and assuming an average $\mathcal{P}r_g$ of 0.75, becomes

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = 0.78\left(1 + r\frac{c_p}{c_g}\right)^{0.45}. \tag{5}$$

Although the results of this work were presented in the form of mean heat transfer coefficients over the whole test section, these could be considered approximately as assymptotical values, as the tube length was large as compared to the thermal entrance length (approximately 30 diameters [7]).

Babcock and Wilcox [4]. The work also reported mean heat transfer coefficients for a graphite—carbon dioxide suspension with particle dimensions smaller than 5 μ, measured in a tube 12.7 mm diameter and 40 diameters long, at a pressure of 6 ata. The corresponding assymptotic heat transfer coefficients, of Figs. 1 and 2, were derived from the data presented, considering that the axial variation of the heat transfer in this work was identical to that in references [5] and [7].

Curievici, Peretz and Dinulescu [7]. The local heat transfer coefficients for an air—graphite suspension with an average particle dimension of 3 μ, were measured in a tube 30 mm diameter and 100 diameters long. The pressure was nearly atmospheric and the Reynolds number ranged from 11500 to 43000. The solids loading ratio varied from 0 to 27. The temperature difference in all tests was between 80° and 100°C. Heat transfer data were correlated by the following equation:

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = 0.43\left(1 + \frac{c_p}{c_g}r\right)^{0.765}\left(1 + 0.6\,e^{-0.085\frac{X}{D}}\right). \tag{6}$$

Depew [2]. The local heat transfer was studied experimentally with an air—glass suspension of 30 μ and 200 μ particle dimension. The Reynolds number was fixed to 13500 and 27400 for all tests and the solids loading ratio was varied from 0 to 7. This was the first work in which local values were measured; a minimum heat transfer was observed at small loading ratios which was found again in subsequent works [6]...[8]. An analytical treatment of the local heat transfer, based on the suspension energy equations derived by Tien [3], was also presented, leading to the following equation for the calculus of the local heat transfer coefficients:

$$\frac{1}{\mathcal{N}u_s} = \frac{1}{\mathcal{N}u'_g} + \frac{1}{2}(\theta_g - \theta_s)_\infty , \tag{7}$$

where $\mathcal{N}u_s$ is the suspension Nusselt number at a distance X/D from the tube inlet and $\mathcal{N}u'_g$ is the gas Nusselt number at a distance $X\Big/\left[\left(1 + r\frac{c_p}{c_g}\right)D\right]$, at the same gas flow rate; the second term in equation (7) represents in dimensionless form the difference between the gas temperature and the bulk suspension temperature, for which a calculus formula was also indicated depending on the physical properties of the suspension. The minimum heat transfer was theoretically determined to appear at a solids concentration given by the condition $rc_p/c_g = 1$, which is roughly verified by the exist ng experimental data. Still, the heat transfer values predicted by equation (7) are too small, especially at the higher solids concentrations.

Tien [3]. A theoretical analysis of heat transfer to a flowing fluid—solids suspension was done in this work. By making certain assumption the energy equations for both phases were derived and solved. Tien's analytical solution indicates that the effect of the solid particles on the heat transfer coefficient it governed by the factor rc_p/c_g. This fact was also shown in the correlations of references [1] and [9]. In agreement with the experimental results the analysis predicts higher local heat transfer coefficient and a longer thermal entrance length, but contrary to the experimental evidence the assymptotic heat transfer coefficient is predicted to be equal to that of the fluid alone.

Tien and Quan [5]. The local heat transfer was studied experimentally with air—lead and air—glass suspensions of 30 μ and 200 μ particle dimensions. Gas Reynolds numbers were set at 15000 and 30000, and loading ratios were varied between 0 and 3. The heat transfer coefficients were found qualitatively to increase with c_p/c_g.

3. General Discussion

Experimental and analytical studies on heat transfer by suspensions have to describe and explain the dependance of the local heat transfer coefficients on the governing parameters: solids loading ratio, axial distance from tube inlet, specific heat ratio, particle dimensions, physical properties of particles, tube diameter, tube position relative to the vertical, heat flux, temperature, Reynolds number, velocity. Up to now, a more systematic treatment was given only to the first three of the above mentioned parameters, for which empirical correlations were developed in certain limited ranges of experimental conditions (Table 1). Some general conclusions could be drawn which are discussed below.

The heat transfer is modified in the gas—solids suspensions by two chief effects of the solid particles. On the one hand, the solids increase the volumetric heat capacity of the flowing medium, leading to an increase

Table

Summary of experimental results

Reference	Solids	Solids loading ratio	Particle size	Gas	Gas pressure	Gas Reynolds number	Tube diameter mm	Tube length dia.
[1]	Graphite	up to 90 kg solids/kg gas	1 to 5 μ	He N_2 CF_4 Air Co_2	2 to 9 ata	2 000... 400 000	8...22	100...289
[2]	Glass spheres	0...7 kg solids/kg gas	30 μ 200 μ	Air	atmospheric	13 500 and 27 400	21	50
[4]	Graphite	up to 100 kg solids/kg gas	less than 5 μ	CO_2	6 ata	—	12,7	40
[5]	Graphite	10. .50 kg solids/kg gas	less than 10 μ	N_2	atmospheric	8 000... 35 000	12,7	40
6]	Graphite, Aluminium oxide	0...40 kg solids/kg gas	65 μ 70 μ 130 μ 180 μ 290 μ	N_2 He Air	atmospheric	8 000... 35 000	8,16	80
7]	Graphite	0...27 kg solids/kg gas	3 μ	air	atmospheric	13 500... 27 400	30	100
[8]	Glass, Lead	0...3 kg solids/kg gas	30 μ 200 μ	air	atmospheric	15 000 and 30 000	21	50

of the temperature gradients at the wall and thus to an increase of the heat transfer. On the other hand, the gaseous phase flow field is distorted by the solid particles; an alteration in the fluid flow field, such as a change in velocity profile or a decrease in turbulence, would induce a change in the temperature profile, and consequently a change in the heat transfer coefficient. The experimental results show (Fig. 1) that the specific heat effect combined with the hydrodynamic effect tends to produce a decrease in the Nusselt number at low solids rates and an increase at high rates. The energy equations of Tien, on the basis of which the only two existing analytical treatments were derived [2], [3], took into account only the first effect mentioned above and assumed the influence of solid particles on the fluid flow field to be negligible, which could explain the deviation of the analytical results from the experimental data.

Particle size has a substantial effect on the suspension heat transfer. Local heat transfer coefficients increase when the particle size decrease, but the corresponding thermal entrance length decreases, at the same time. From the combination of these two contrary trends there still results an increased heat transfer for smaller particles.

The importance of the specific heat ratio c_p/c_g, can be seen in Fig. 1: for sufficiently large loading ratios, at similar particle dimensions, the curves with a higher c_p/c_g present higher heat transfer values. The c_p/c_g effect on heat transfer coefficients was correlated in references [1] and [6].

The gas Reynolds number influence on the $\mathcal{N}u_s/\mathcal{N}u_g$ is small in the range investigated. Several authors did not observe any stratification of the experimental results beyond experimental errors when the Reynolds number varied within rather large limits. The Reynolds number was varied four times in references [5] and [6], and from 2000 to 400 000 in reference [1], without any noticeable effect on the Nusselt numbers ratio.

The temperature was not found to have a large effect on the heat transfer up to values at which the radiation is intervening [5]. An indication of the radiative heat transfer can be found in [6] where a significant increase of the Nusselt numbers ratio was observed at a tube temperature of 680°C. The temperatures of the correlations analysed in the present paper were under the radiative values.

4. Correlations of Experimental Data

For all the available data, the most convenient form of correlation is obtained by separating as a factor the positional dependance of the heat transfer coefficients [5]...[7]:

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = \left(\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g}\right)_\infty \psi\left(\frac{X}{D}\right). \tag{8}$$

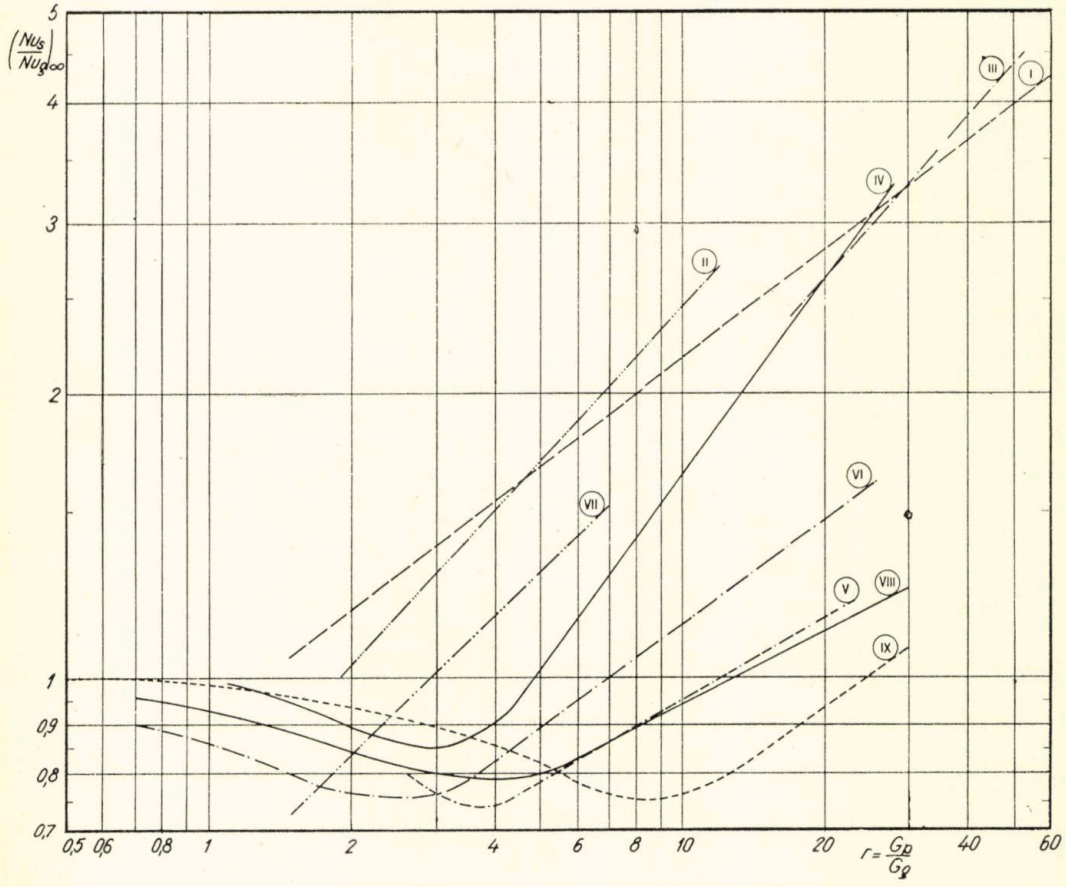


Fig. 1. — Assymptotic heat transfer data. *I* — air, helium, freon, carbon dioxide, nitrogen-graphite, $d < 5\,\mu$ [1]; *II* = Carbon dioxide-graphite, $d < 5\,\mu$ [4]; *III* — Nitrogen-graphite, $d < 10\,\mu$[5]; *IV* — air-graphite $d < 5\,\mu$ [7]; *V* — helium-graphite, $d = 65\,\mu$ [6]; *VI* — air, nitrogen-graphite, $d = 65\,\mu$ [6]; *VII* — air-glass, $d = 30\,\mu$ [2]: *VIII* — air, nitrogen-graphite, $d = 130\,\mu$, $180\,\mu$, $290\,\mu$ [6]; *IX* — helium-graphite, $d = 130\,\mu$, $180\,\mu$, $290\,\mu$ [6].

If the quantities $(\mathcal{N}u_s/\mathcal{N}u_g)_\infty$ and ψ were known as fonctions of the governing parameters, once the nature of the suspension, the concentration and the experimental conditions specified, it would be possible to determine the heat transfer for any tube legth:

$$(\mathcal{N}u_s)_{\text{medium}} = \frac{1}{L}\int_0^L \psi\left(\frac{X}{D}\right)\mathcal{N}u_g\,dX. \tag{9}$$

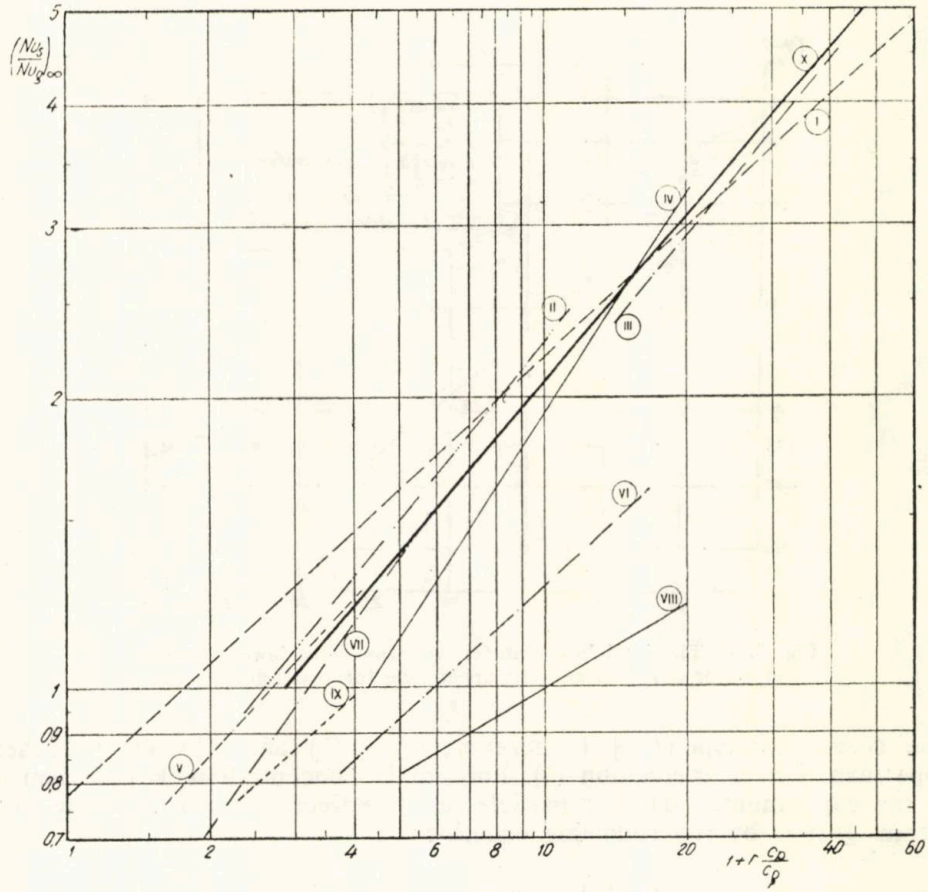


Fig. 2. — Correlation of experimental data for small particle.

I — air, helium, freon, carbon dioxide, nitrogen—graphite, $d < 5\,\mu$ [1]; *II* — carbon dioxide—graphite, $d < 5\,\mu$ [4]; *III* — nitrogen—graphite $d < 10\,\mu$ [5]; *IV* — air—graphite, $d < 5\,\mu$ [7]; *V* — helium—graphite, $d = 65\,\mu$ [6]; *VI* — air, nitrogen—graphite, $d = 65\,\mu$ [6]; *VII* — air—glass, $d = 30\,\mu$ [2]; *VIII* — air, nitrogen—graphite, $d = 130\,\mu$, $180\,\mu$, $290\,\mu$ [6]; *IX* — helium—graphite, $d = 130\,\mu$, $180\,\mu$, $290\,\mu$ [6]; *X* — the correlation of all the data with particle dimensions smaller than $10\,\mu$.

The existing information is insufficient to express the quantities in Eq. (8) as functions of the particle size, therefore the data of the different authors referred to specified limited ranges of particle dimensions.

In the most studied range of micron-size particles the correlations (1), (5) and (6) were developed, for different experimental conditions. The assymptotic heat transfer coefficients from the different works were plotted in Fig. 2 against the factor rc_p/c_g, and it was noticed that the data for small particle sizes were integrated within a rather narrow band.

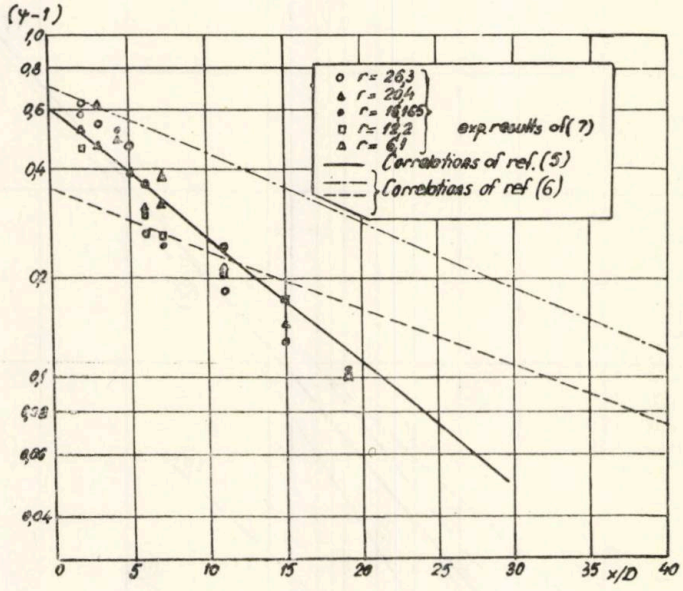


Fig. 3. — The local heat transfer variation (the lower curve of [6] is for $d = 65\,\mu$ and the upper one for $d = 130...290\,\mu$).

The curves corresponding to references [4], [5] and [7] have a higher slope than that of correlation (5). For solids concentration larger than 4 all the experimental data for particles smaller than $10\,\mu$ can be correlated within $\pm 10\,\%$ by the following equation:

$$\left(\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g}\right)_\infty = 0.55\left(1 + r\frac{c_p}{c_g}\right)^{0.57}, \tag{10}$$

represented in Fig. 2 by the curve X. The differences between the curves *I, II, III* and *IV* are probably due to the variance of the other parameters (tube diameter, temperature, Reynolds number, etc.) which have a smaller effect and have not been correlated. The local variation of the heat transfer

coefficients was found [5]...[7] to be rather independent of the solids concentration. The data of reference [5] and [7] for particle sizes smaller than 10 μ were correlated by the same factor ψ within $\pm$ 7 % :

$$\psi = 1 + 0.6\, e^{-0.085\frac{X}{D}} \tag{11}$$

and it is reasonable to induce that this relation fits also the small particles data of references [1] and [4]. It results from the above considerations that all the existing data for particle sizes smaller than 10 μ can be correlated satisfactorily by a unique equation:

$$\frac{\mathcal{N}u_s}{\mathcal{N}u_g} = 0.55\left(1 + r\frac{c_p}{c_g}\right)^{0.57}\left(1 + 0.6\, e^{-0.095\frac{X}{D}}\right). \tag{12}$$

Eq. (12) san be safely used for predicting local heat transfer coefficients in a wide range of experimental situations which is the superposition of the ranges investigated in references [1], [4], [5] and [7] (see § 2 and Table 1).

The range of applicability of Eq. (12) could be extended for particle sizes up to 30 μ (with certain precautions due to the insufficiency of corresponding data) on the basis of curve *VII* position in Fig. 2 and by noting that even for particle dimensions as high as 65 μ the distance factor ψ is not very much different from that for the smallest particles (Fig. 3).

For particle dimensions of about 65 μ and 130...290 μ the correlations (2) and (3) can be used respectively, and in interjacent ranges one of the correlations (2), (3) or (12) adequately selected, can be of preliminary use.

4. Conclusions

1. A brief summary of the available studies of local heat transfer by gas—solids suspensions was presented.

2. On the basis of the existing information the influence of the main governing parameters was analysed.

3. For particle sizes smaller than 10 μ and loading ratios larger than 4, a unique correlation was derived, namely (12), which covers an extended range of experimental conditions.

Received September 21, 1970

Center of Technical and Physical Research of the Academy of Socialist Republic of Romania, Jassy Division

REFERENCES

1. Schluderberg D. C., Whitelaw R. L., Carlson R. W., *Gaseous Suspensions. A New Reactor Cooland.* Nucleonics, **19**, *8* (1961).
2. Depew C. A., *Heat Transfer to Flowing Gas—Solids Mixtures in a Vertical Circular Duct.* UCRL *9280*, 1960.

3. Tien C. L., *Heat Transfer by a Turbulently Flowing Fluid—Solids Mixture in a Pipe* J. Heat Transfer, **83**, *2* (1961).
4. * * * Babcock and Wilcox Company, U.S.A. Report, No. B.A.W. 1159.
5. Hawes R. I., Holland E., Kirby G. I., Waller P. R., *An Experimental Investigation into Heat Transfer and Pressure Drop Properties of Gaseous Suspensions of Solids.* UKAFA, Rep. AEEW—R. *244.*
6. Sukomel A. S., Tsvetkov F. F., Keromov R. V., *A Study of Local Heat Transfer from a Tube Wall to a Turbulent Flow of Gas Bearing Suspended Solid Particles.* Teploenerghetika, *2* (1967) (translated in english).
7. Curievici I., Peretz D., Dinulescu H., *Experimental Investigation of Local Heat Transfer from a Tube Wall to a Turbulently Flowing Gas—Graphite Suspension.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVI (XX)**, *3—4*, s. IV (1970).
8. Tien C. L., Quan V., *Local Heat Thansfer Characteristics of Air — Glass and Air — Lead Mixtures in Turbulent Pipe Flow.* An ASME Publication, Paper No. *62*—TH—*15.*
9. Gorbis Z. R., Bakhtiozin R. A., *Investigation of Convection Heat Transfer for a Gas—Graphite Suspension Under Conditions of Internal Flow in Vertical Channels.* Soviet J. Atomic Energy, **12**, *5* (1962) (translated in english).

TRANSFERUL DE CĂLDURĂ LA SUSPENSII GAZ—SOLID ÎN CURGERE PRIN TUBURI

(Rezumat)

Se prezintă într-o formă coerentă datele existente în literatură asupra transferului de căldură convectiv cu suspensii gaz—solid în curgere în conducte și se analizează influența celor mai importanți parametri determinanți: încărcarea cu material solid, distanța axială, raportul căldurilor specifice, dimensiunea particulelor solide, temperatura și numărul Reynolds. Se stabilește o formulă de corelare (12) pentru suspensiile cu particule mai mici de 10 μ și pentru încărcări cu material solid mai mari ca 4 kg solid/kg gaz, care poate fi utilizată în proiectare pentru evaluarea coeficienților de transfer de căldură locali cu o precizie de $\pm$ 10%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

DK. 621—1

DYNAMISCHE KUPPLUNGSGRÖSSEN ALS SEITLICHE UND ZENTRALE KOMMUTATOREN IN TRIEBSYSTEMEN

VON

GH. F. ONCESCU

1. Vorwort

Beim Bau moderner Maschinen, Aggregate und Industrieanlagen wird neben dem Studium jedes einzelnen Maschinenteils auch der Untersuchung der Eigenschaften der Gesamtheit dieser Teile, die aus dem Zusammenspiel und der Wechselwirkung der einzelnen Elemente hervorgehen, eine ständig wachsende Bedeutung beigemessen. Für beide Gesichtspunkte spielen die Kupplungen eine ganz besonders wichtige Rolle.

Die Erfahrung hat gezeigt, dass für die Übertragung der mechanischen Energie nicht schaltbare und schaltbare Kupplungen mit Elementen aus makromolekulären Verbindungen besser geeignet sind als die aus Metallteilen bestehenden. Die Einführung derartiger Elemente in den Maschinenbau bedeutet eine teilweise Neuorientierung auf dem Gebiete der Kupplungs-, Steuer- und Regelungsorgane.

Die Ausführung von Triebsystemen, die Kupplungen der erwähnten beiden Klassen enthalten, bildet ein wichtiges aktuelles Problem, und zwar nicht nur prinzipiell, sondern in erster Linie im Hinblick auf die dadurch erzielbare Steigerung der Produktivität, Qualität und Wirtschaftlichkeit komplexer mechanischer Anlagen und Aggregate.

Beim Betrieb von Aggregaten und Anlagen erfordert die Notwendigkeit der Übertragung der Drehmomentänderung eine Berücksichtigung der Abweichu gen von der korrekten Montage, wie z. B. Winkel- und Axialverschiebungen. Die Einflüsse dieser Abweichungen spiegeln sich in der Verkettung der Elemente des betreffenden Systems bzw. in den Strukturfragen desselben wider.

Die Änderung des häufig nur auf die Verdrehung bezogenen dynamischen Steifigkeitsgrades durch zusätzliche Biegebelastungen erklärt das Nichtübereinstimmen zwischen den errechneten und den gemessenen Resultaten besser als die Berücksichtigung nur eines einzelnen Belastungszustandes.

Von besonderer Bedeutung ist die Festlegung einer bequemen Methode zur Einführung einer bestimmten Kupplung an einer bestimmten Stelle des Systems.

Die Kenntnis der dynamischen entsprechenden den Verbindungsorgans in Triebsystemen ist eine Frage der Qualität der Verbindung selbst und insbesonders der Gesamtanlage, der diese angehören.

Der Titel der vorliegenden Arbeit soll die einheitliche Behandlung folgender Gesichtspunkte anzeigen: a) gegenseitige Abhängigkeit von Steifigkeit und Dämpfungseigenschaft und deren gemeinsame Rolle für die

Deutung des Reaktionsprinzips bei der Beschreibung der Bewegung in einer umfassenderen Formulierung; b) ein wissenschaftliche Darstellung für die gegenseitige Bedingtheit der Elemente eines Triebsystems.

2. Dynamische Kupplungsgrössen als grundlegende Kennzeichen technischer Systeme

Die Wechselwirkung und die Rolle der verschiedenen Bauelemente gehen aus dem dynamischen Schema hervor, das aus Schwingern besteht, die durch nachgiebige Kupplungen miteinander verbunden sind (Abb. 1 *a*). Alle im Abb. 1 *b* ersichtlichen Schwinger — ausser den Endelementen — sind dem im Abb. 1 *a* dargestellten gleich. Selbstverständlich handelt es sich um einen starren Schwinger mit viskoelastischen Verbindungen an beiden Enden.

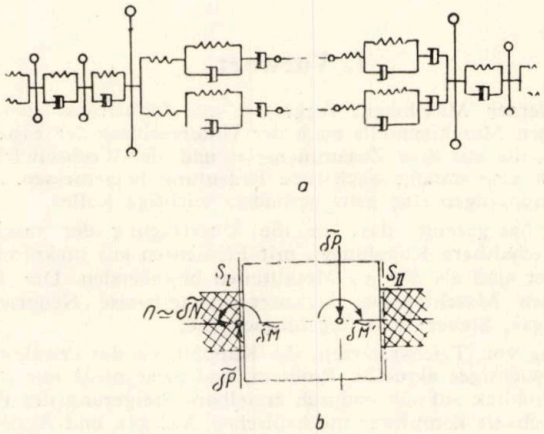


Abb. 1.—Symbol der Dreh- und Biegesteifigkeit bei We hselwirkung zwischen Kupplung und Schwinger.

2.1. Hypothesen für den Schwinger

2.1.1. Der Schwinger ist homogen und isotrop, starr zylinderförmig und gegenüber der Belastungsebene symmetrisch.

S_I, S_{II} seien zwei bewegliche Bezugsquerschnitte in unmittelbarer Nähe der Trennflächen zwischen dem starren Schwinger und der verformbaren Kupplung.

Für die Querschnitte S_I, S_{II} gelten die Bernoulli—Navier sche Hypothese sowie die Voigt-Maxwell schen Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen in Abhängigkeit von der Zeit.

2.1.2. Die erzwungenen Schwingungen des Oszillators werden als stationär betrachtet (harmonische Abhängigkeit von der Zeit).

Die Störkraft $\delta\widetilde{P}'$ wirkt in der gleichen Ebene wie das Moment $\delta\widetilde{M}_i'$ (mit gleicher Wirkung lässt sich das Moment $\delta\widetilde{M}_i$ benutzen), beide mit der gleichen Frequenz $\omega/(2\pi)$. Auf den Schwinger wirkt ferner eine Druck- oder Zugkraft $\delta\widetilde{N}$ in Richtung der unverformten Achse des aus Kupplungen und Schwinger bestehenden Systems.

2.1.3. Bei Geltung obiger Voraussetzungen folgt, dass die Verschiebungen Abb. 1 *b* $\delta\widetilde{y}'$ und $\delta\widetilde{\alpha}'$ in der Belastungsebene denjenigen in den Querschnitten S_{I} und S_{II} gleich sind.

Im allgemeinen Fall einer beliebigen periodischen Bewegung erfolgt die Berücksichtigung mehrerer Störkräfte nach dem Überlagerungsprinzip, durch Zusammensetzung dieser Kräfte nach der Fourier-Methode.

2.2. Hypothesen betreffend nachgiebige Kupplungen

2.2.1. Die beiden Kupplungen werden vom mechanischen Standpunkt als symmetrisch in bezug auf die Belastungsebene betrachtet. Sie brauchen nicht homogen und isotrop zu sein. Die Kupplungen sind durch dynamische Kupplungsgrössen (als Mass der Wechselwirkung von Schwinger und Kupplung) gekennzeichnet. Diese gestatten gleichzeitig die Berechnung der Dämpfungsfähigkeit.

Die verschiedenen Kupplungsarten (steife bzw. Kupplungen mit relativer Dreh- oder Verschiebemöglichkeit) ergeben für diese Grössen spezifische Werte.

2.2.2. Infolge der für Schwinger, Kupplung und Belastung angenommenen Symetrie wird die Anzahl der Beweglichkeitsgrade des Systems von sechs auf drei vermindert.

Sieht man in erster Näherung von der Axialverschiebung $\delta\widetilde{N}$ ab, was im Hinblick auf die häufigeren praktischen Fälle zulässig ist, so verbleiben zwei Möglichkeiten der Verschiebung einer S-Fläche.

2.3. Analytische Beziehungen

2.3.1. *Allgemeiner Fall*

Gilt das Überlagerungsprinzip, so lässt sich die Beziehung zwischen den Reaktionskräften im Schwerpunkt des Querschnitts S_1 (Kraft $\delta\widetilde{P}$ und Moment $\delta\widetilde{M}$) und den entsprechenden Verschiebungen ($\delta\widetilde{y}$ in Richtung von $\delta\widetilde{P}$ und $\delta\widetilde{\alpha}$ in Richtung von $\delta\widetilde{M}$) wie folgt schreiben

$$\widetilde{\delta P} = \underline{D}_{11}\widetilde{\delta y} + \underline{D}_{12}\widetilde{\delta\alpha}, \quad \widetilde{\delta M} = \underline{D}_{21}\widetilde{\delta y} + \underline{D}_{22}\widetilde{\delta\alpha},$$

oder

$$\widetilde{\delta y} = \underline{L}_{11}\widetilde{\delta P} + \underline{L}_{12}\widetilde{\delta M}, \quad \widetilde{\delta\alpha} = \underline{L}_{21}\widetilde{\delta P} + \underline{L}_{22}\widetilde{\delta M}. \tag{1}$$

Die Bedeutung der Koeffizienten $\underline{D}$ und $\underline{L}$ erhält man durch Partikularisierung. Sie sind komplexe Konstanten, die *dynamische Kupplungsgrössen* (DKG) genannt seien.

Die linearen Transformationen (1) sind eindeutig bestimmt durch die Koeffizientenmatrizen (nichtsinguläre Matrizen der Reaktionen und Verformungen)

$$\left\| \begin{matrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} \\ \underline{D}_{21} & \underline{D}_{22} \end{matrix} \right\| \quad \text{bzw.} \quad \left\| \begin{matrix} \underline{L}_{11} & \underline{L}_{12} \\ \underline{L}_{21} & \underline{L}_{22} \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

Diese beiden Matrizen sind inverse und die dualen Beziehungen zwischen den Koeffizienten sind durch die bekannten Gleichungen zwischen $\underline{D}$ und $\underline{L}$ gegeben, und zwar:

$$\left\| \begin{matrix} \underline{L}_{11} = \dfrac{\underline{D}_{22}}{|\underline{D}|} & \underline{L}_{12} = -\dfrac{\underline{D}_{21}}{|\underline{D}|} \\ \underline{L}_{21} = -\dfrac{\underline{D}_{12}}{|\underline{D}|} & \underline{L}_{22} = \dfrac{\underline{D}_{11}}{|\underline{D}|} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

worin $|\underline{D}| = \underline{D}_{11}\underline{D}_{22} - \underline{D}_{12}\underline{D}_{21}$.

Die dynamischen Kupplungsgrössen treten klarer in Erscheinung, wenn in der Definitionsgleichung (1) verücksichtigt wird, dass im Schwerpunkt des Querschnitts S_1 entweder nur die Kraft $\widetilde{\delta P}$ ($\widetilde{\delta M} = 0$) oder aber nur $\widetilde{\delta M}$ ($\widetilde{\delta P} = 0$) vorhanden ist, die Kupplung wird als vom Schwinger getrennt betrachtet.

Es folgt für die dynamischen Grössen $\underline{D}$:

$$\widetilde{\delta\alpha} = 0 \begin{cases} \underline{D}_{11} = \dfrac{\widetilde{\delta P}}{\widetilde{\delta y}}, \\ \underline{D}_{21} = \dfrac{\widetilde{\delta M}}{\widetilde{\delta y}}, \end{cases} \qquad \widetilde{\delta y} = 0 \begin{cases} \underline{D}_{12} = \dfrac{\widetilde{\delta P}}{\widetilde{\delta\alpha}}, \\ \underline{D}_{22} = \dfrac{\widetilde{\delta M}}{\widetilde{\delta\alpha}}, \end{cases} \tag{4}$$

und für die Grössen $\underline{L}$:

$$\widetilde{\delta M} = 0 \begin{cases} \underline{L}_{11} = \dfrac{\widetilde{\delta y}}{\widetilde{\delta P}}, \\ \underline{L}_{21} = \dfrac{\widetilde{\delta\alpha}}{\widetilde{\delta P}}, \end{cases} \qquad \widetilde{\delta P} = 0 \begin{cases} \underline{L}_{12} = \dfrac{\widetilde{\delta y}}{\widetilde{\delta M}}, \\ \underline{L}_{22} = \dfrac{\widetilde{\delta\alpha}}{\widetilde{\delta M}}. \end{cases} \tag{5}$$

Ist $\omega = 0$, so werden die Grössen L zu Einflusskoeffizienten und die dynamischen Kupplungsgrössen D sind deren Inverse.

Ist der Kupplungswerkstoff ideal elastisch, homogen und isotrop im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie, so gilt $D_{12} = D_{21}$ bzw. $L_{12} = L_{21}$.

Man erhält dynamische Symmetrie für die Kupplung, wenn aus Gleichung (1) nur dynamische Kupplungsgrössen gleicher Indizes hervorgehen, also

$$(6) \qquad D_{11} = \frac{\delta \widetilde{P}}{\delta \widetilde{y}}, \quad D_{22} = \frac{\delta \widetilde{M}}{\delta \widetilde{y}}; \qquad L_{11} = \frac{\delta \widetilde{M}}{\delta \widetilde{P}}, \quad L_{22} = \frac{\delta \widetilde{y}}{\delta \widetilde{M}},$$

und folglich

$$(7) \qquad D_{11} L_{11} = 1; \qquad D_{22} L_{22} = 1.$$

2.3.2. *Sonderbedingungen für die Kupplung mit dynamischer Symmetrie*

Beziehung (1) kann als allgemeiner Fall einer Kupplung betrachtet werden, abgesehen davon dass $\delta \widetilde{N} = 0$ angenommen wurde.

Diese Beziehung schliesst drei Sonderfälle ein:

a) Kupplung mit der Möglichkeit relativer Drehung, die erzielt wird, wenn der Schwinger einen Beweglichkeitsgrad verliert $\delta \widetilde{y} \to 0$. Dieser Fall ist durch eine einzige dynamische Kupplungsgrösse D_{22} bzw. L_{22} gekennzeichnet, welche den Zusammenhang zwischen $\delta \widetilde{M}$ und $\delta \widetilde{\alpha}$ darstellt. Da $\delta \widetilde{P}$ keinen Einfluss auf $\delta \widetilde{\alpha}$ ausübt, erhalten die Matrizen (2) die Form

$$(8) \qquad \left\| \begin{matrix} \infty & \text{unbestimmt} \\ \text{unbestimmt} & D_{22} = \dfrac{1}{L_{22}} \end{matrix} \right\| \quad \text{bzw.} \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22} = \dfrac{1}{D_{22}} \end{matrix} \right\|.$$

b) Kupplung mit der Möglichkeit relativer Verschiebung, wenn die Drehung verhindert ist: $\delta \widetilde{\alpha} \to 0$. Für die Darstellung des Zusammenhangs zwischen $\delta \widetilde{y}$ und $\delta \widetilde{P}$ sind die dynamischen Grössen D_{11} und L_{11} ausreichend, da $\delta \widetilde{M}$ keinen Einfluss auf $\delta \widetilde{y}$ hat, und die Matrizen werden zu

$$(9) \qquad \left\| \begin{matrix} D_{11} = \dfrac{1}{L_{11}} & \text{unbestimmt} \\ \text{unbestimmt} & \infty \end{matrix} \right\| \quad \text{bzw.} \quad \left\| \begin{matrix} L_{11} = \dfrac{1}{D_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

c) Eine starre Kupplung wird erzielt, wenn beide Beweglichkeitsgrade ausgeschaltet werden: $\delta \widetilde{y} \to 0$, $\delta \widetilde{\alpha} \to 0$ und die Matrizen (2) die Sonderformen

$$(10)\qquad \begin{Vmatrix} \infty & \text{unbestimmt} \\ \text{unbestimmt} & \infty \end{Vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

annehmen.

In all den drei Sonderfällen nehmen die Determinanten der Matrizen unbestimmte Werte an oder werden zu Null.

Die Anzahl der zur Beschreibung der dynamisch symmetrischen Kupplung erforderlichen dynamischen Grössen verringert sich von vier auf zwei und in Sonderfällen sogar auf eine einzige Grösse.

Bemerkung. Beim Bau der im Folgenden beschriebenen Versuchsanlage wurde auch die Möglichkeit einer Erzielung der für die Praxis wichtigen Sonderfälle ins Auge gefasst.

3. Seitliche und zentrale Kommutatoren

Um die Allgemeingültigkeit der hier erzielten Schlussfolgerungen klarer herauszustellen, wurden einige Beziehungen der Gruppentheorie benutzt.

Nichtsinguläre quadratische Matrizen der Form (2) drücken dynamische Kupplungsgrössen für verschiedene Abschnitte des Systems aus und bilden eine nichtkommutative Gruppe G, d.h. eine Gruppe, für welche das Produkt

$$(11)\qquad [\underline{D}_{\mathrm{I}}][\underline{D}_{\mathrm{II}}] \neq [\underline{D}_{\mathrm{II}}][\underline{D}_{\mathrm{I}}]$$

wobei

$$\underline{D}_{\mathrm{I}},\ \underline{D}_{\mathrm{II}} \in G,$$

bzw.

$$(11')\qquad a.b \neq b.a, \quad a,b \in G$$

ist.

Offensichtlich sind vom mechanischen Standpunkt aus die Ergebnisse der Produkte auf den beiden Seiten der Beziehung (11) verschieden $\underline{D}_{\mathrm{I,II}} \neq \underline{D}_{\mathrm{II,I}}$.

Die Beziehungen zwischen den Grössen $D_{\mathrm{I}}, \underline{D}_{\mathrm{II}}, \ldots, D_n$ ergeben sich aus der Art der Anordnung der Zweige des Systems und der betreffenden Abschnitte. Im Folgenden soll die Anordnung der Abschnitte bzw. der dynamischen Kupplungsgrössen in Serienform betrachtet werden; die Grundgedanken unserer Überlegungen lassen sich jedoch auch auf die andern Anordnungstypen anwenden.

Die Notwendigkeit, auch in einer nichtkommutativen Gruppe kommutativ zu arbeiten, bzw. die Beziehung (11) in eine Gleichung zu verwandeln, führte zu der Idee des Kommutators. Das ist aber gleichbedeutend damit, in den nichtabelschen Gruppen das Analogon der Beziehung

$$(12)\qquad a.b = b.a, \quad a,b \in G$$

zu finden, die die Abelschen Gruppen definiert.

Aus den Abhandlungen [4], [5] geht der klassische Charakter der Definition einer normalen Kongruenzbeziehung zwischen den Elementen der Gruppe

$$a \cdot b \equiv b \cdot a \quad (DG) \tag{13}$$

hervor, die zeigt, dass $a\,b$ und $b\,a$ hinsichtlich des normalen Divisors DG kongruent sind.

Gleichzeitig mit der Kongruenz (13) besteht auch die Kongruenz

$$(b \cdot a)^{-1} \equiv (b\ a)^{-1} \quad (DG). \tag{14}$$

Das Produkt der Kongruenzen (13) und (14) führt zu der Beziehung

$$a \cdot b\ (b\ a)^{-1} \equiv (b\ a)\ (b \cdot a)^{-1} = e \quad (DG) \tag{15}$$

die zeigt, dass alle Elemente $a\ b\ (b\ a)^{-1} = a\ b \cdot a^{-1}\ b^{-1}$ in DG vorhanden sein müssen.

Die oben angewandte normale Kongruenzbeziehung ist:

a) reflexiv $\rightarrow$ jedes Element ist sich selbst kongruent $a \equiv a$ (Beziehung (14));

b) symmetrisch $\rightarrow a \equiv b \rightarrow b \equiv a$;

c) transitiv $\rightarrow a \equiv b, b \equiv c \rightarrow a \equiv c$ ([4, S. 12]).

Die Operation der Kommutatorenbildung wird besonders in der Theorie der metabelschen Gruppen hervorgehoben, und zwar durch die L e v i schen Sätze,die diese Theorie beherrschen.

S a t z 1. Damit eine Gruppe metabelisch ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Operation der Kommutatorenbildung assoziativ ist.

S a t z 2. Damit eine Gruppe metabelisch ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Operation der Kommutatorenbildung die beiden Distributivitätsgesetze hinsichtlich der Multiplikation innerhalb der Gruppe befriedigt, d. h.

$$[a \cdot b,c] = [a,c]\ [b,c], \quad [a,b \cdot c] = [a\,.\,b]\ [a,c], \quad \text{worin} \quad [a,b] = a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b. \tag{16}$$

Damit ist die Definition der Kommutatorenprodukte zweier Gruppenelemente gegeben, die von der in (15) ausgedrückten verschieden ist..

Im allgemeinen wird entweder mit dem Linkskommutator $a\ b\ .a^{-1}\ b^{-1}$ oder mit dem Rechtskommutator $a^{-1}\ a^{-1}a\,.b$ gearbeitet.

Man definiert und bildet in elementarer Weise seitliche Linkskommutatoren, seitliche Rechtskommutatoren und Zentralkommutatoren. Dann werden diese mit den im § 2 gezeigten physikalischen Grössen und mit der Matrizentheorie in Einklang gebracht.

Mittels der in der Gruppe definierten Multiplikationsoperation muss sich Beziehung (11′) in Beziehung (12) verwandeln. Der seitliche und der zentrale K-Kommutator werden in jedes der Produkte des 1. und 2. Gliedes der Beziehung (11') eingeführt. Man erhält die Gleichungen

$$\begin{cases} K_1 \cdot a \cdot b = b \cdot a, & a \cdot K_2 \cdot b = b \cdot a, & a \cdot b \cdot K_3 = b \cdot a, \\ a \cdot b = K_4 \cdot b \cdot a, & a \cdot b = b \cdot K_5 \cdot a, & a \cdot b = b \cdot a \cdot K_6. \end{cases} \tag{17}$$

Die Lösung dieser Gleichungen führt zu

$$\begin{cases} K_1 = b \cdot a \cdot b^{-1} \cdot a^{-1}, & K_2 = a^{-1} \cdot b \cdot a \cdot b^{-1}, & K_3 = b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \cdot a, \\ K_4 = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}, & K_5 = b^{-1} \cdot a \cdot b \cdot a^{-1}, & K_6 = a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b. \end{cases} \tag{18}$$

Wie ersichtlich, gilt

$$(19) \qquad \begin{cases} K_4 = K_1^{-1}, & K_1 \cdot K_4 = e, \\ K_6 = K_3^{-1}, & K_3 \cdot K_6 = e. \end{cases}$$

Definition. *Die Beziehungen* (17) *definieren die Linkskommutatoren* K_1, K_4, *die Rechtskommutatoren* K_3, K_6 *und die Zentralkommutatoren* K_2, K_5 *mit den Ausdrücken* (18) *und deren Beziehung* (19).

Die durch dieser Definition eingeführten Kommutatoren finden sich in der mit den Elementen a, b, a^{-1}, b^{-1} gebildeten Permutationsmenge P_4 wieder.

Diese 6 Kommutatoren sind vom Einheitselement verschieden und folglich imstande, die Ungleichung $a \cdot b \neq b \cdot a$ in eine Gleichung zu verwandeln.

Die seitlichen (Links- und Rechtskommutatoren) und die Zentralkommutatoren kommen in den Äquivalenzbeziehungen der dynamischen Kupplungsgrössen wieder vor. Mit Rücksicht auf die Beziehungen (17) lässt sich

$$(20) \qquad \begin{aligned} K_{I,II} \cong \underline{D}_{II,I} \cong D_I K_2 \underline{D}_{II} \cong \underline{D}_{II,I} \cong \underline{D}_{I,II} K_3 \cong \underline{D}_{II,I} \cong \underline{D}_{I,II} \cong \\ \cong K_4 \underline{D}_{II,I} \cong \underline{D}_{I,II} \cong \underline{D}_{II} K_5 D_I \cong \underline{D}_{I,II} \cong \underline{D}_{II,I} K_6 \end{aligned}$$

schreiben, was der Beziehung (11) entspricht.

4. Funktionale und konstruktive Grundlagen der Simulators für mechanische Kraftkreisläufe zur Bestimmung der dynamischen Kupplungsgrössen (DKG)

Tatsächliche, für Rechnungen brauchbare Werte der DKG, die Kennwerte für die verschiedenen Triebelemente und -systeme häufig in der Industrie anzutreffende Kapazitäten darstellen lassen sich im Laboratorium erzielen.

Faktoren, die bei der Planung und Konstruktion der Versuchseinrichtung mitwirkten, waren einerseits die anzuwendenden Versuchsmethoden und andrerseits die Zielsetzung einer Bestimmung der DKG für Einzelelemente und deren Prüfung im Rahmen von Gesamtsystemen, sowie wirtschaftliche Anforderungen der Industrie.

Zwei geschlossene Energiekreise (*I* und *II* im Abb. 2) ermöglichen mit der gleichen Belastungsvorrichtung:

a) die Bestimmung der statischen, dynamischen und Dauerbelastungskurven für Asynchrongetriebe, die für die Vorkalkulation erforderlich sind;

b) die Reproduktion der beim Ein- und Auskuppeln erzielten Übergangsphasen, die für die Verfolgung der charakteristischen Vorgänge erforderlich sind;

c) eine Nachprüfung der DKG im Rahmen der gebildeten Systeme im Übergangs- und Dauerbetrieb.

Der geschlossene Energiekreislauf I (Abb. 2) samt Zusatzvorrichtungen dient zur Bestimmung der DKG mittels:

A) Freier Schwingungen eines geeigneten einfachen Systems:

a) unter mittlerer Belastung, hervorgerufen durch Vorrichtung *8* (Abb. 2), in geschlossenem Kreislauf mit parallel geschalteten Elementen. Die Gleichung des Systems hat die Form

$$\mathcal{J}\ddot{\tilde{\varphi}} + D_s\tilde{\varphi} = 0, \tag{21}$$

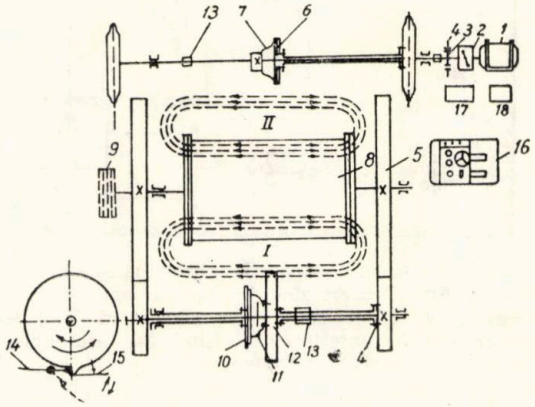


Abb. 2.—Grudschemen des Simulators zur Bestimmung der DKG. *1*—Elektromotor; *2*—Getriebekasten; *3*—Servobremse; *4*—mechanischer Pulsator; *5*—Übersetzungen, die den Energiekreis schlissen; *6*—Manöverkupplung; *7*—viskoelastisches Element Maxwell-Voigtschen Typs; *8*—Torsionsstangen; *9*—zusätzliche Masse; *10*—Scheibe zur Befestigung der ständigen Kupplung; *11*—zu untersuchende Kupplung; *12*—Schwungrad; *13*—Messgerät; *14*—Vorrichtung für zusätzliche Drehung; *15*—Vorrichtung für zusätzliche Belastung; *16*—Zentralsteuerpult; *17*—Energiequelle im potentialem Zustand; *18*—Anlassrheostat für Elektromotor.

worin $D_s = D_I + D_{II}$ dynamische Kupplungsgrössen des Systems, des untersuchten Elements (insbesondere nachgiebige Kupplungen) und des zugrunde gelegten Musterelements sind. Es bedeuten: $\tilde{\varphi}$ — Torsionswinkel mit Sinusvariation, $\mathcal{J}$ — das Trägheitsmoment des Schwingers;

b) ohne mittlere Belastung, mit Serienschaltung der Elemente, deren DKG die Form (11) haben.

B) Erzwungener Schwingungen an verschiedenen Stellen des Kreislaufes.

Der geschlossene Energiekreislauf II (Abb. 2) kann jedes mechanische Übertragungssystem einschliessen, dessen Schlupf sich in den Grenzen dar.

Pendelbewegung der Belastungsvorrichtung hält. Ein Beispiel ist in Abb. 3 gezeigt.

Verschiedene wechselseitige Lagen der Wellen bzw. deren Stützen sind in dem „Montagefeld" (Rand im Abb. 3 schraffiert) leicht erzielbar.

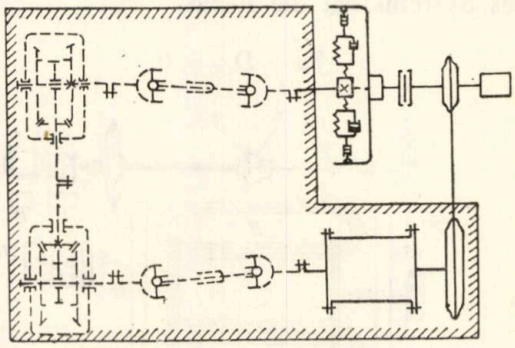


Abb. 3. — Schema eines Übertragungssystems im zweiten Energiekreis der Versuchsanlage (die voll ausgezogene Linie stellt den dauernden Teil der Anlage und die unterbrochene Linie das darin eingeführte System dar).

Ein viskoelastisches Element typischer zeitlicher Verformung ändert die Belastung und Entlastung des Kreislaufes infolge der elastischen Retardation und der Relaxation.

Die Reproduzierung der dynamischen Erscheinungen sowohl im Dauerbetrieb als auch in den Übergangsphasen in diesem Kreislauf gestattet die Prüfung und etwaige Korrektur der DKG im Rahmen der betreffenden Triebsysteme.

Zu dem 2. Energiekreislauf der Anlage gehören Reibungskupplungen, nicht schaltbare Kupplungen, Kardanwellen, Zahnradgetriebe, Ketten- und Riementriebe, die im allgemeinen in Systemen für Industrieanlagen vorkommen.

4.1. Einige funktionale und konstruktive Eigenschaften des Simulators

Die installierte Leistung, die hauptsächlichen Abmessungen und die „geschlossene Leistung" für die beiden geschlossenen Energiekreise der Simulators wurden durch die in den Motoreinheiten (z.B. Antriebsaggregaten von Bohranlagen) entwickelten Nen- und Höchstwerten bestimmt. Als Grundlage für die Ermittlung der Parameter für den Bau der Anlage dienten ferner auch die je nach ihren Funktionen eingeteilten Übertragungsgruppen (Übersetzungsgetriebe, Richtungswender u.a.), die in Hochleistungsanlagen auftreten.

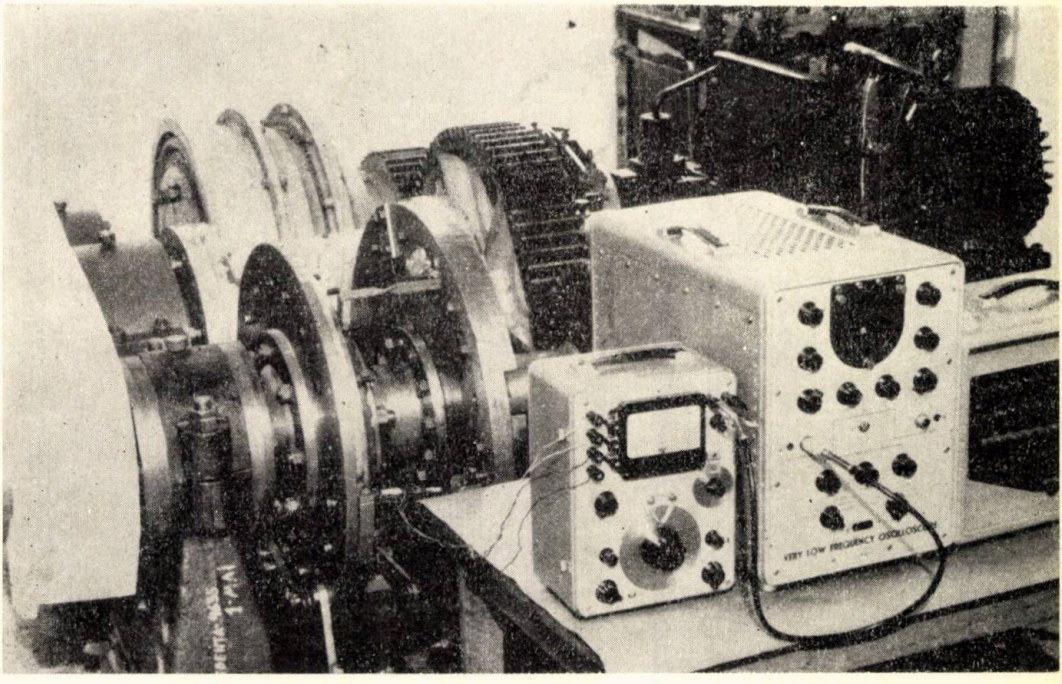


Abb. 4. — Gesamtansicht des Simulators zur Ermittlung und Nachprüfung der DKG. Spezielle Montageanordnung.

Die entstehende Drehzahl hält sich zwischen 50 und 1 450 U/min. und das in dem geschlossenen Kreislauf zu messende Reibungsmoment ist von dem durch den Schlupferzeuger entwickelten Moment und dem Übertragungsverhältnis abhängig.

Dieser Simulator (Gesamtansicht Abb. 4) wurde mit Unterstützung einiger Maschinenfabriken im Jahre 1963 gebaut und arbeitet im Laboratorium der Fakultät für Erdölfördermaschinen und -anlagen des Instituts für Erdöl, Erdgas und Geologie in Bukarest.

5. Schlussfolgerungen

1. Die in einem allgemeinen Rahmen definierten und durch komplexe Grössen ausgedrückten dynamischen Kupplungsgrössen genügen zur völligen Kennzeichnung nachgiebiger Kupplungen und deren Wechselwirkung im System. Sie sind für die Abschnitte des Systems charakteristisch, schaffen einen engen Zusammenhang zwischen den kinematischen und den dynamischen Fragen und stellen ein Instrument sowohl für die Erforschung als auch für die Kennzeichnung der Kupplungsgetriebe dar.

Mit Hilfe der DKG lassen sich auch die Mengen der verwandelten Energie in bequemer Weise ausdrücken.

Unter den hier festgelegten Voraussetzungen lassen sich selbst die beweglichsten Verbindungen durch nur zwei DKG des Querschnittes kennzeichnen.

2. Durch Definition der abstrakten Untergruppen seitlicher und zentraler Kommutatoren und deren Auslegung mittels DKG wird ein wissenschaftliches Kriterium für den Einsatz der einen oder der andern, im Rahmen der verschiedenen Triebsysteme verfügbaren Kupplung geschaffen.

3. Die mit der hier kurz beschriebenen Simulator eigener Bauart durchgeführten Versuche haben gezeigt, dass sich Vervollkommnungen im Maschinen- und Aggregatebau in bedeutendem Masse durch eine Vertiefung der Kenntnisse hinsichtlich der Anwendung der DKG erzielen lassen.

Eingegangen am 14. Oktober 1969

Institut für Erdöl, Erdgas und Geologie, Bukarest

LITERATURVERZEICHNIS

1. Benz W., *Kenngrössen für das Verhalten drehnachgiebiger Kupplungen.* VDI–Ber., *73* (1963).
2. Biber W., *Drehnachgiebige Kupplung und ihre zweckmässige Anwendung im Schwingungssystem.* VDI-Ber., *73* (1963).

3. Schach W., *Kenngrössen und Berechnung altseitig nachgiebiger Kupplungen.* VDI – Ber., *73* (1963).
4. Zassenhaus H., *Lehrbuch der Gruppentheorie.* Berlin, 1937.
5. Barbilian D., *Grupuri cu operatori.* Buc., 1960.
6. Oncescu Gh., *Statisches und dynamisches Verhalten nachgiebiger Kupplungen.* Conférence de Mécanique, Bucarest, 1965.
7. Oncescu Gh., *Механическая установка для исследования силовых передачи.* Вестник машиностроения, *12* (1967).

MĂRIMI DINAMICE DE CUPLARE UTILIZATE DREPT COMUTATORI LATERALI ȘI CENTRALI ÎN SISTEMELE DE ACȚIONARE

(Rezumat)

Se clarifică unele calități și caracteristici ale elementelor componente ale sistemelor mecanice, în special ale sistemelor de acționare. Modurile de cuplare (legătură) menționate în literatură se arată ca fiind cazuri particulare ale cazului general de cuplare flexibilă. Ele sînt descrise și exprimate prin *mărimi dinamicc de cuplare* (MDC), cantități complexe ce caracterizează interacțiunea elementelor într-un sistem tehnic și în mod deosebit cuplajele MDC se interpretează ca subgrupuri de comutatori laterali și comutatori centrali.

De asemenea sînt expuse succint principiile de construcție a unei instalații experimentale pentru determinarea și verificarea mărimilor dinamice de cuplare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.01

CONSIDERAŢII ASUPRA UTILIZĂRII UNUI TRADUCTOR DE INDUCŢIE, DE TIP ROTATIV, PENTRU ÎNSCRIEREA DIAGRAMELOR DE VARIAŢIE A VITEZELOR ŞI ACCELERAŢIILOR PE ECRANUL OSCILOGRAFULUI CATODIC [1])

DE

OCTAVIAN MUNTEANU, GH. ILIESCU, CORNELIU DRĂGAN, I. SIMIONESCU şi C. DUCA

1. În continuarea unor lucrări [1] şi [2], elaborate în cadrul Centrului de Mecanica Solidului al Academiei R. S. R, autorii şi-au propus să extindă posibilităţile de înscriere a diagramelor de variaţie a vitezelor şi acceleraţiilor pentru elemente care au mişcări de translaţie rectilinie şi care parcurg, în timpul unui ciclu cinematic, spaţii mari (pînă la cîteva sute de milimetri).

Literatura de specialitate ([3] şi [4]), indică două tipuri de traductoare inductive, ambele avînd la baza funcţionării mişcarea relativă de translaţie, rectilinie. Primul tip este destinat unor deplasări mici (pînă la 10 mm), iar al doilea unor deplasări mai mari (fără indicarea limitei superioare a intervalului).

Pentru ca tensiunile date de aceşti traductori să fie proporţionale cu vitezele de deplasare ale elementului mobil, realizarea lor impune respectarea unor condiţii de execuţie destul de severe (menţinerea constantă a inducţiei magnetice (B) în întrefier, înfăşurarea strînsă şi distribuţia uniformă a spirelor bobinei etc.), condiţii ce rezultă din

$$E = Blv. \tag{1}$$

Din cercetările experimentale efectuate de autori, rezultă că pentru elementele mecanismelor care au o mişcare de translaţie rectilinie, cu deplasări mai mari, se poate folosi un traductor de inducţie, de tip rotativ,

---

[1]) Cercetare efectuată în baza convenţiei de colaborare cu Centrul de Mecanica Solidului al Acad. R. S. România, Bucureşti.

cu rezultate chiar mai bune decît cele obţinute cu traductorii folosiţi pînă în prezent.

Traductorul utilizat este un generator de curent continuu de tip miniaturizat, avînd un rotor de circa 3 gf, încît momentul de inerţie al acestuia, într-o primă aproximaţie, poate fi neglijat.

Ca principiu, metoda folosită în lucrare se bazează pe transformarea mişcării rectilinii în mişcare de rotaţie, cu parametri cinematici proporţionali.

Traductorul fiind legat solidar cu elementul aflat în mişcare de translaţie rectilinie (tachetul camei, patina mecanismului bielă-manivelă etc.), acţionarea lui se realizează cu un fir flexibil, fixat la ambele capete de batiu, după o direcţie paralelă cu suportul translaţiei rectilinii, înfăşurat o singură dată pe şaiba generatorului (fig. 1).

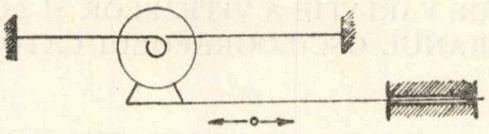


Fig. 1

2. Deoarece tensiunea dată de generatorul de acest tip poate fi exprimată printr-o relaţie de forma

$$E = a\Phi n, \tag{2}$$

rezultă că în cazul cînd a (constanta generatorului) şi Φ (fluxul magnetic) sînt constante, tensiunea furnizată de generator este proporţională cu numărul n de rotaţii ale rotorului. Dar cum mişcarea rectilinie a elementului mobil a fost transformată, cu ajutorul firului flexibil, în mişcare de rotaţie, fără alunecare, înseamnă că n, care este proporţional cu viteza unghiulară a rotorului generatorului, este proporţional şi cu viteza v a mişcării de translaţie rectilinie. Deci tensiunea furnizată de generator este proporţională cu această viteză v, respectiv:

$$E = k' v \tag{3}$$

Această tensiune este în prealabil trecută printr-un filtru (dublu T), care elimină componenta alternativă a frecvenţei purtătoare de 10 kHz, apoi este introdusă în oscilograful catodic, pe ecranul căruia se înscrie diagrama de variaţie a vitezelor. Oscilograful folosit este de fabricaţie Orion, destinat fenomenelor variabile cu frecvenţă foarte joasă, iar ecranul fluorescent este cu mare persistenţă, pentru ca imaginea să poată fi observată şi fotografiată.

Traductorul fiind un generator de curent continuu, tensiunea sa la borne are polaritate, ceea ce permite să se înscrie nu numai mărimea ci şi semnul vitezelor, deoarece atunci cînd elementul mobil, de studiat, îşi schimbă sensul de mişcare, rotorul traductorului se roteşte şi el în sen contrar, inversînd polaritatea tensiunii produse de traductor.

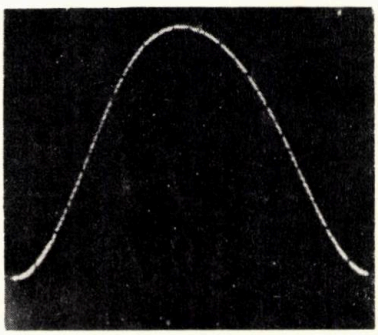


Fig. 2.
$s(t)$; k_1=0,005 m/mm.

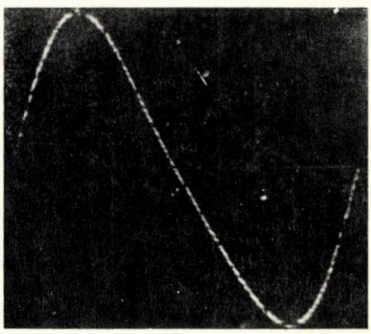


Fig. 3.
$v(t)$; k_v = 0,01 ms^{-1}/mm.

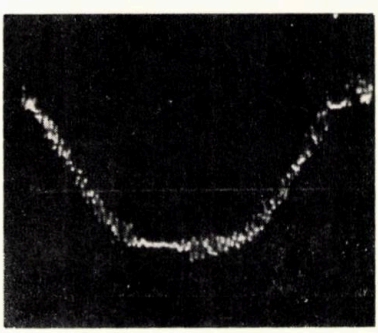


Fig. 4.
$a(t)$; k_a = 0,05 ms^{-2}/mm

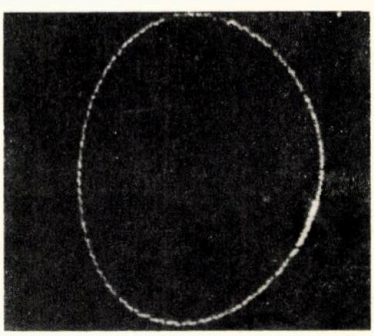


Fig. 5.
$v(s)$; k_1=0,005 m/mm,
k_v = 0,01 ms^{-1}/mm

Mecanismul bielă–manivelă simetric
l_{AB} = 0,08 m, l_{BC} = 0,24 m, k_t = 0,05 s/mm

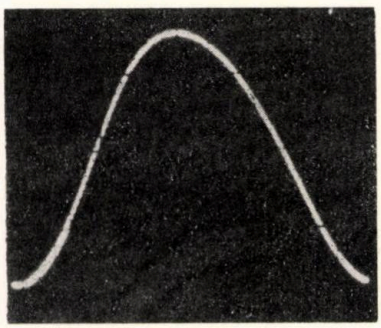


Fig. 6.
$s(t)$; $k_1 = 0{,}005$ m/mm

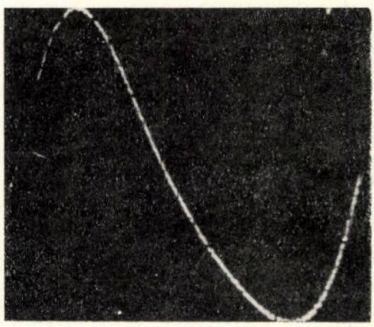


Fig. 7.
$v(t)$; $k_v = 0{,}01$ ms^{-1}/mm

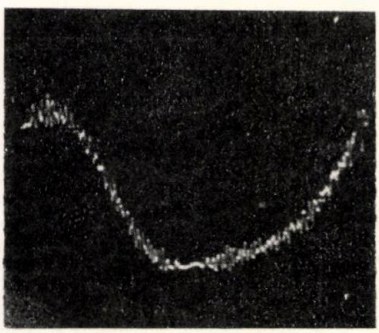


Fig. 8.
$a(t)$; $k_a = 0{,}05$ ms^{-2}/mm

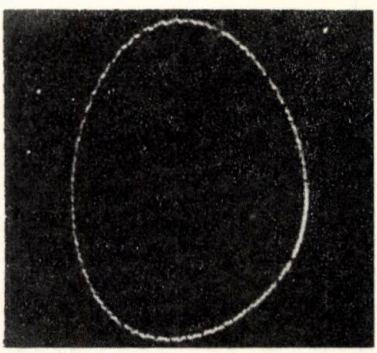


Fig. 9.
$v(s)$; $k_1 = 0{,}005$ m/mm,
$k_v = 0{,}01$ ms^{-1}/mm

Mecanismul bielă-manivelă nesimetric
$l_{AB} = 0{,}08$ m, $l_{BC} = 0{,}24$ m, $e = 0{,}06$ m, $k_t = 0{,}05$ ms/mm.

Trecînd tensiunea dată de traductor, printr-un circuit de derivare electronică, pe ecranul oscilografului se înscrie diagrama de variație a acceleraţiilor, care corespunde sensului matematic al derivatiei, din toate punctele de vedere.

Se remarcă faptul că atunci cînd cursa elementului mobil de studiat este mică (sub 20 mm), tensiunea dată de traductor fiind şi ea mică, este necesară o amplificare mare a semnalului, pentru a obţine pe ecranul osciloscopului o diagramă de amplitudine corespunzătoare. La derivarea electronică este necesară o nouă amplificare, ceea ce atrage desavantajul obţinerii unor diagrame trasate cu linii groase, pe care se înregistrează şi oscilaţii parazite.

3. Folosind procedeul descris mai sus, s-au obţinut diagramele de variaţie a parametrilor cinematici $s(t)$ (cu ajutorul unui traductor rezistiv), $v(t)$ şi $a(t)$ şi $v(s)$ pentru un mecanism bielă-manivelă simetric (fig. 2...5), cît şi pentru un mecanism nesimetric.

În acelaşi mod s-au înregistrat diagramele $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ şi $s'(s)$, pentru unele mecanisme cu camă (liniară, parabolică, cosinusoidală şi sinusoidală).

Pentru mecanismul bielă-manivelă simetric, au fost determinate numeric valorile extreme ale vitezei şi acceleraţiilor, cu ajutorul cărora s-au etalonat oscilogramele. Etalonarea, pentru mecanismul bielă-manivelă simetric s-a folosit şi pentru mecanismul nesimetric, avînd amplificările corespunzătoare la osciloscopul catodic constante, pentru fiecare parametru în parte (fig. 6...8).

Procedeul expus, de trasare a diagramei vitezelor, are avantajul că permite să se obţină diagrama acceleraţiilor destul de precis conturată, printr-o singură derivare electronică.

Dacă se porneşte de la semnalul rezistiv, ce dă diagrama spaţiilor, prin derivare electronică se obţine diagrama vitezelor, afectată inerent de fenomene parazite şi abia printr-o nouă derivare electronică se obţine diagrama acceleraţiilor afectată şi de fenomenele parazite ale primei derivări, astfel încît ea devine practic imposibil de folosit. Dificultatea creşte pe măsură ce semnalul iniţial, de la care se pleacă, scade în intensitate.

4. Se impune o analiză succintă a principalelor surse de erori care afectează diagramele înregistrate.

Una dintre cele mai importante erori se datoreşte osciloscopului, care deşi este construit pentru frecvenţe foarte joase, nu poate înregistra corect tensiuni riguros constante, deoarece nu este echipat cu amplificatori de curent continuu. Din această cauză, spotul luminos are tendinţa permanentă de a reveni la mijlocul ecranului. Menţionăm că această eroare diferă destul de mult de la o diagramă la alta, că nu poate depăşi 8%, chiar în cele mai nefavorabile condiţii de lucru (amplificare mare) şi că s-ar putea reduce de aproximativ 10 ori, dacă s-ar folosi un osciloscop corespunzător.

O altă eroare, care apare la schimbările rapide ale mărimilor cinematice, se datoreşte inerţiei rotorului traductorului, care modifică şi tensiunea din firul flexibil Această eroare este destul de greu de evaluat cantitativ, însă este neînsemnată ca mărime, deoarece frecvenţa de lucru a mecanismului de studiat este de 0,4 Hz.

O a treia eroare se datoreşte faptului că linia care reprezintă variaţia parametrului cinematic are o anumită grosime, ceea ce împiedică o citire precisă a parametrilor cinematici. Din calculele efectuate, pe baza mărimilor obţinute din diagrame, rezultă că, pentru condiţiile cele mai defavorabile de lucru, această eroare nu depăşeşte 3%.

În sfîrşit, eroarea datorită încălzirii traductorului este neglijabilă, deoarece curentul consumat de întregul dispozitiv de înregistrare este mic în raport cu curentul care poate duce la schimbarea regimului termic al traductorului.

Primită la 23 iulie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanisme şi organe de maşini,
Laboratorul de mecanisme

BIBLIOGRAFIE

1. Bogdan R., Pelecudi Chr., Calmaciuc L., Antonescu Gr., *Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor.* St. şi cerc. de Mec. apl. Buc., **X**, *3* (1959).
2. Bogdan R.. Pelecudi Chr., Calmaciuc L., Antonescu Gr., *Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecano-electronice.* St. şi cerc. de Mec. apl. Buc., **XIII**, *4* (1962).
3. Раевский Н. П., *Методы экспериментальных исследований механических параметров машин.* Изд. АН СССР, М., 1952.
4. Раевский Н. П., *Датчики механических параметров машин.* Изд. АН. СССР, М., 1959.
5. Turicin A. M., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. tehn., Buc., 1957 (trad. din l. rusă).
6. Grave H. F., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. tehn., Buc., 1966 (trad. din l. germană).

ÜBER DIE ANWENDUNG EINES INDUKTIVEN DREHÜBERSETZERS DER GESCHWINDIGKEITS- UND BESCHLEUNIGUNGS-DIAGRAMEN

(Zusammenfassung)

Die Verfasser benutzen einen Induktionsübertrager (Miniatur-Gleichstromgenerator mit Kollektor), zur Besichtigung auf dem Schirme eine bildbeständigen Kathodenoszillographen, der Bewegungsparameter (Geschwindigkeit und Beschleunigung) eines Elementes in Translationsverschiebung, in rechtwinkligen Koordinaten.

Die Anwendung des angegebenen Übertragers ist geeignet für grössere Translationsverschiebungen (mehrere Hundert Milimeter). Die ermittelte Diagramen, sind mit einer grösseren Bildschärfe als die mit anderen bisher von den Verfassern benutzten Gebern.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C Z. 621.01

STUDIUL MECANISMELOR PLANETARE PRIN METODA GRUPELOR CINEMATICE

DE

C. DUCA

1. Introducere

În literatura consacrată mecanismelor planetare se remarcă absența unei metode unitare și precise de studiu cinematic și cinetostatic. Astfel, în abordarea acestei probleme, se tratează de obicei mecanisme particulare, de o anumită schemă structurală, iar procedeele folosite nu pot fi generalizate.

În lucrarea de față se propune o metodă de studiere a mecanismelor planetare, analogă celei folosite la mecanismele cu cuple inferioare, bazată pe noțiunea clasică de grup assuric sau grup cinematic. Metoda constă în descompunerea mecanismului în grupe și aplicarea, pentru fiecare grup, a procedeului de studiu specific stabilit.

În cele ce urmează, pornind de la formula structurală, se vor stabili schemele structurale ale grupelor uzuale ce intră în componența mecanismelor planetare. De asemenea se vor indica procedeele de analiză cinematică și cinetostatică pentru două din aceste grupe, folosite cu precădere. Analiza cinematică și cinetostatică se face în ipoteza funcționării în regim a mecanismului din care face parte grupul. Deci, vitezele unghiulare ale tuturor elementelor se consideră constante.

2. Grupele cinematice ale mecanismelor planetare

Mecanismele planetare, și deci și grupele cinematice ale acestor mecanisme, conțin următoarele tipuri de elemente mobile:

a) roți dințate și b) portsateliți — elemente ce execută o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe și au rolul de a susține axele roților și de a păstra invariabilă distanța dintre ele.

Roțile dințate se got grupa, formînd lanțuri cinematice simple, deschise; fiecare roată se leagă printr-o articulație de un element comun: portsatelit sau batiu (fig. 1).

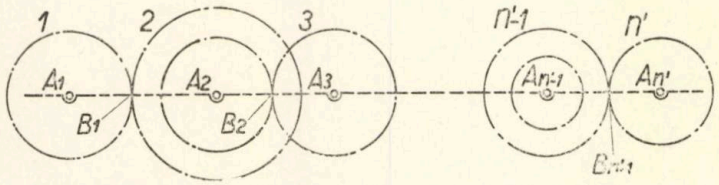


Fig. 1

Vom denumi aceste lanțuri cinematice, pentru simplificarea expunerii, lanțuri cinematice de bază.

Gradul de libertate al lanțului cinematic de bază se calculează cu formula

$$L=3n' - 2c'_5 - c'_4, \tag{1}$$

în care n' este numărul de elemente — roți dințate sau blocuri de roți (elementul de care se leagă toate roțile prin articulații nu aparține lanțului cinematic de bază); c'_5 — numărul de cuple cinematice de clasa a 5-a (lanțul cinematic de bază conține n' articuțații exterioare notate $A_1, A_2, \ldots, A_{n'}$ (fig. 1)); c'_4 — numărul de cuple cinematice de clasa a 4-a (lanțul cinematic de bază conține $n'-1$ cuple de clasa a 4-a notate $B_1, B_2, \ldots, B_{n'-1}$ (fig. 1)).

Înlocuind în (1) numerele de cuple de fiecare clasă, rezultă $L = 1$. În aceste condiții, formula structurală a unui grup cinematic se poate scrie sub forma

$$3p + l - 2c_5 - c_4 = 0, \tag{2}$$

în care p este numărul de portsateliți; l — numărul de lanțuri cinematice de bază; c_5 — numărul de cuple de clasa a 5-a, exclusiv cele care aparțin lanțurilor cinematice de bază; c_4 — numărul cuplelor de clasa a 4-a, exclusiv cele care aparțin lanțurilor cinematice de bază.

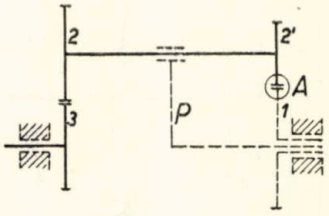
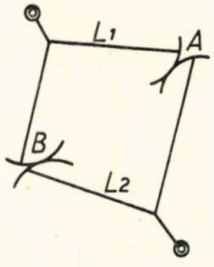
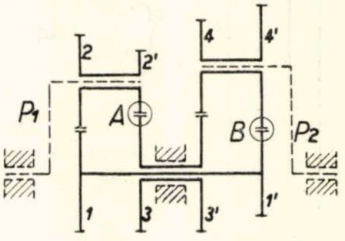
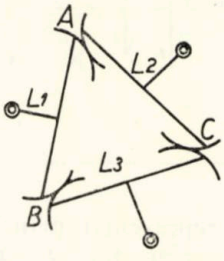
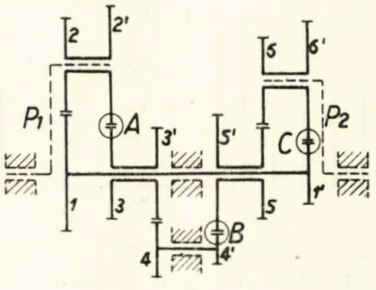
Cuplele de clasa a 5-a, care pot face parte din grup, sînt articulațiile cu care se leagă fiecare portsatelit la batiu. Prin urmare

$$c_5 = p. \tag{3}$$

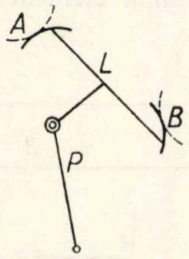
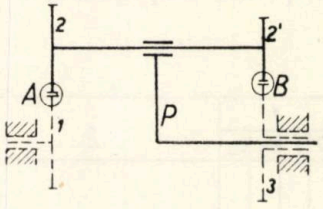
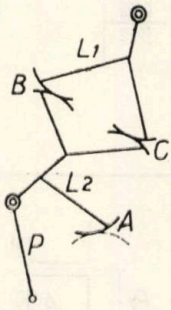
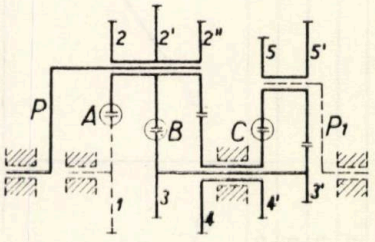
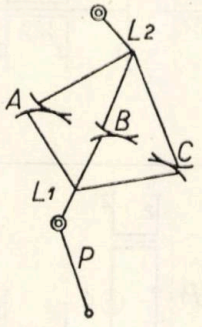
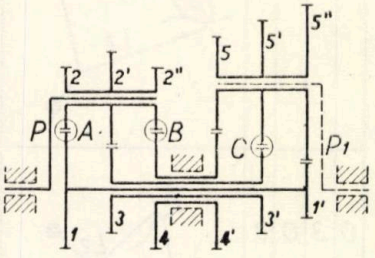
Soluțiile întregi ale sistemului format din ecuațiile (2) și (3), avînd necunoscutele p, l, c_5, c_4, conduc la întocmirea schemelor structurale ale grupelor cinematice. Trebuie de remarcat că între p și l există relația $p \leqslant l$, deoarece fiecare lanț cinematic de bază este legat de un singur portsatelit, iar portsateliții nu se pot lega între ei. Deci, soluțiile cu $p > l$ se exclud.

În tabelele 1...3 sînt prezentate soluţiile cele mai simple (coloana *1*), schemele structurale ale grupelor corespunzătoare (coloana *2*), precum şi schemele unor mecanisme planetare care conţin aceste grupe (coloana *3*). În cadrul schemelor din coloana *2*, fiecare lanţ cinematic de bază este reprezentat, pentru simplificare, ca un singur element avînd notaţia *L*, iar

belul 1

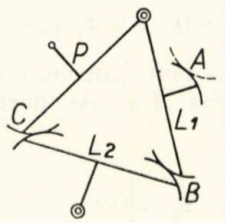
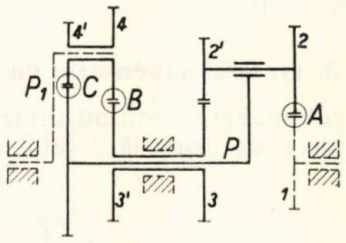
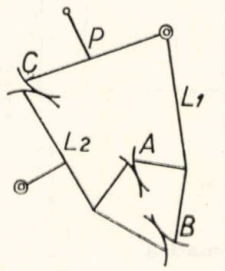
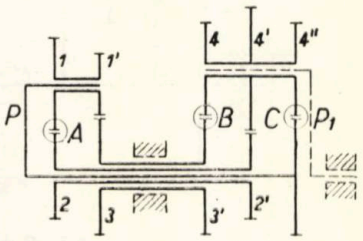
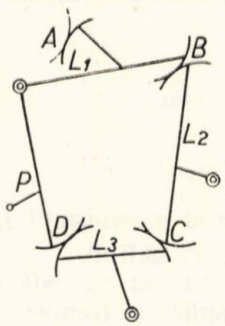
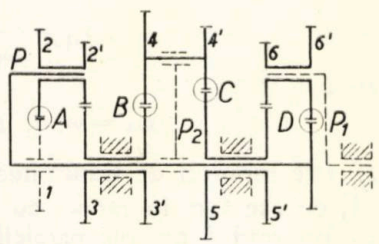
1				2	3
P	l	c_5	c_4		
0	1	0	1		
0	2	0	2		
0	3	0	3		

Tabelul 2

1				2	3
p	l	c_5	c_4		
1	1	1	2		
1	2	1	3		
					

ansamblul articulațiilor exterioare este reprezentat prin două cercuri concentrice de rază mică. În cadrul schemelor din coloana *3*, se utilizează semnele convenționale obișnuite, iar cuplele superioare prin care lanțurile

Tabelul 3

1				2	3
p	l	c_5	c_4		
1	2	1	3		
					
1	3	1	4		

cinematice de bază se leagă între ele, de elementele conducătoare sau de batiu, sînt încercuite pentru a delimita aceste lanţuri.

Legarea a două lanţuri cinematice de bază, între ele, printr-o cuplă superioară, se face întotdeauna prin intermediul unei roţi centrale care are

axa fixă în ambii portsateliţi şi deci poate fi considerată aparţinînd oricăruia din cele două lanţuri. Pentru a asigura o descompunere în grupe unică, în cazul în care cele două lanţuri aparţin unor grupe diferite, se va aplica următoarea regulă: cupla superioară se repartizează într-un grup, iar roata centrală în celălalt.

3. Grupul cinematic cu $p = 0$, $l = 1$, $c_5 = 0$, $c_4 = 1$

Grupul studiat, constituit dintr-un lanţ cinematic de bază $(2, 3, \ldots, n)$, este legat de roata centrală 1 prin cupla A şi de portsatelitul P (fig. 2).

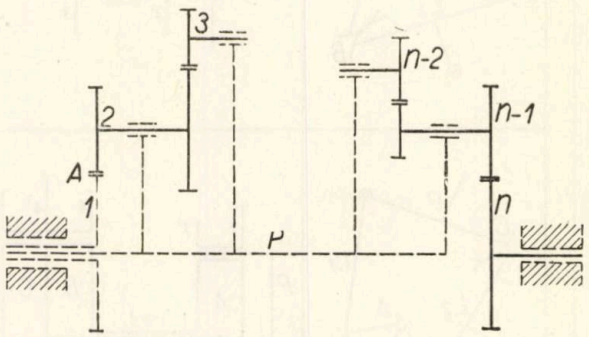


Fig. 2

3.1. Cinematica

Se cunosc vitezele unghiulare ale elementelor 1 şi P. Pentru a determina viteza unghiulară a unei roţi oarecare k, din lanţul cinematic de bază, se aplică formula lui Willis:

$$i_{k1}^{P} = \frac{\omega_k - \omega_P}{\omega_1 - \omega_P}. \tag{4}$$

Rezultă

$$\omega_k = \omega_1 i_{k1}^{P} + \omega_P (1 - i_{k1}^{P}), \tag{5}$$

în care i_{k1}^{P} este raportul de transmitere al mecanismului, format din roţile $1, 2, \ldots, k$, cu axe fixe în raport cu portsatelitul.

Dacă axa roţii k nu este paralelă cu axa centrală (cazul sateliţilor conici), formula lui Willis nu se poate aplica şi trebuie de recurs la planul vitezelor unghiulare.

3.2. Cinetostatica

În limitele acestui paragraf, interacţiunea dintre două roţi dinţate se pune în evidenţă prin momentul, în raport cu axa uneia dintre ele, al forţelor de reacţiune şi de frecare dintre flancuri. Acest moment se notează

prin simbolul M, afectat de trei indici; primul indică elementul din partea căruia se exercită reacţiunea, al doilea precizează elementul asupra căruia se exercită reacţiunea, iar al treilea, situat între paranteze, indică elementul în raport cu axa căruia se calculează momentul.

În cazul grupului studiat se cunoaşte momentul M_n aplicat elementului n.

Momentul care acţionează asupra unei roţi oarecare k notat $M_{k+1,\,k(k)}$, se detemină cu relaţia cunoscută

$$M_{k+1,\,k(k)} = M_n i_{nk}^{P} \eta^{\lambda}, \tag{6}$$

în care i_{nk}^{P} este raportul de transmitere al mecanismului format din roţile $n, n-1, \ldots, k+1, k$ cu axe fixe în raport cu portsatelitul; η — randamentul aceluiaşi mecanism; λ — exponent care poate lua valoarea $+1$ sau -1, după cum elementul n este conducător sau condus în mecanismul indicat mai sus [3].

În acelaşi mod se determină momentul care acţionează asupra elementului 1 anume:

$$M_{2\,1\,(1)} = M_n i_{n1}^{P} \eta^{\lambda}. \tag{7}$$

Momentul care acţionează asupra portsatelitului, datorat reacţiunilor din articulaţiile lanţului cinematic de bază, (M_{LP}), se determină din ecuaţia de momente pentru întregul grup, în raport cu axa centrală:

$$M_n + M_{1\,2\,(1)} + M_{PL} = 0. \tag{8}$$

Momentul $M_{1\,2\,(1)}$ care figurează în această ecuaţie, se obţine imediat din relaţia evidentă $M_{1\,2\,(1)} = -M_{2\,1\,(1)}$.

Rezultă pentru M_{LP} expresia

$$M_{LP} = M_n - M_{2\,1\,(1)}. \tag{9}$$

4. Grupul cinematic cu $p = 1$, $l = 1$, $c_5 = 1$, $c_4 = 2$

Grupul cinematic studiat, compus din lanţul cinematic de bază $2, 3, \ldots, n-1$ şi din portsatelitul P, este legat de roţile centrale 1 şi n prin cuplele A şi B (fig. 3).

4.1. Cinematica

Se cunosc vitezele unghiulare ale elementelor 1 şi n. Pentru a determina viteza unghiulară a portsatelitului se aplică din nou formula lui Willis

$$i_{1n}^{P} = \frac{\omega_1 - \omega_P}{\omega_n - \omega_P}. \tag{10}$$

Rezultă

$$\omega_P = \frac{\omega_1 - i^P_{1n}\,\omega_n}{1 - i^P_{1n}}. \tag{11}$$

Pentru determinarea vitezei unghiulare a unei roţi oarecare k, se aplică formula (5).

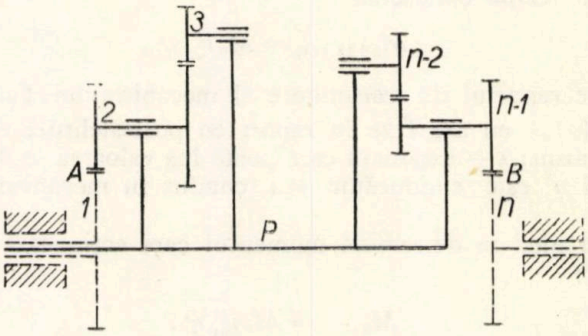


Fig. 3

4.2. Cinetostatica

În cazul grupului studiat se cunoaşte momentul M_P aplicat portsatelitului. Se scrie atunci ecuaţia de momente pentru întregul grup în raport cu axa centrală:

$$M_{n,\,n-1\,(n)} + M_{1\,2\,(1)} + M_P = 0. \tag{12}$$

Deoarece (12) conţine două necunoscute ($M_{n,\,n-1\,(n)}$ şi $M_{1\,2\,(1)}$), pentru determinarea lor se recurge şi la ecuaţia (7). În această relaţie momentul M_n este necunoscut, deoarece grupul din care face parte elementul n se studiază ulterior, dar ecuaţia de momente corespunzătoare roţii n, în raport cu axa sa, stabileşte o relaţie între M_n şi $M_{n-1,\,n\,(n)}$, anume:

$$M_n + M_{n-1,\,n\,(n)} = 0. \tag{13}$$

Înlocuind în (7) expresia lui M_n, rezultată din (13), şi ţinînd seama de egalităţile $M_{2\,1\,(1)} = -\,M_{1\,2\,(1)}$ şi $M_{n-1,\,n\,(n)} = -\,M_{n,\,n-1\,(n)}$, se obţine:

$$M_{1\,2\,(1)} = -\,M_{n,\,n-1\,(n)}\, i^P_{n1}\, \eta^{\lambda}. \tag{14}$$

Sistemul de ecuaţii (12), (14) conduce la următoarele soluţii:

$$M_{1\,2\,(1)} = \frac{M_P\, i^P_{n1}\, \eta^{\lambda}}{1 - i^P_{n1}\, \eta^{\lambda}} \tag{15}$$

şi

$$M_{n,\,n-1\,(n)} = \frac{-M_P}{1 - i_{n1}^P \eta^\lambda}. \tag{16}$$

Momentul care acționează asupra unei roți oarecare k se determină prin relația:

$$M_{k+1,\,k\,(k)} = M_{n,\,n-1\,(n)}\; i_{nk}^P \eta^\lambda. \tag{17}$$

Primită la 5 iunie 1970

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mecanisme și organe de mașini

BIBLIOGRAFIE

1. Кожевников С. Н., *Теория механизмов и машин.* Машгиз, Киев, 1954.
2. Кудрявцев В. Н., *Планетарные передачи.* Машгиз, М., 1960.
3. Manolescu N. I., Maros D., *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinetostatica și dinamica.* Ed. tehn., Buc., 1958.
4. Maros D., *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinematica roților dințate.* Ed. tehn., Buc., 1958.

THE STUDY OF PLANETARY GEAR BY THE METHOD OF KINEMATIC GROUPS

(Summary)

By means of a structural formula, are established the schemes of the usual groups, that intervene in the structure of planetary gears.

It is also perfomed the kinematic and kinetostatic analysis of two groups.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 621.01

METODĂ GENERALĂ PENTRU DETERMINAREA REACŢIUNILOR DIN CUPLELE CINEMATICE ALE MECANISMELOR PLANE

DE

I. SIMIONESCU

1. Generalităţi

Determinarea reacţiunilor din cuplele cinematice ale unui mecanism, cauzate de forţele aplicate şi de inerţie, se face prin metoda cinetostatică care constă în înlocuirea ecuaţiilor de mişcare cu ecuaţii de echilibru dinamic, rezolvabile prin procedeele staticii.

Numărul elementelor din mecanism cărora li se aplică metoda cinetostatică se stabileşte astfel încît, pentru acestea, ecuaţiile de echilibru să se poată rezolva succesiv şi relativ simplu.

Se demonstrează că fiecare grupă cinematică poate fi tratată independent din acest punct de vedere, deoarece elementele sale formează un sistem static determinat. Este deci raţional a se grupa elementele mecanismului în grupe cinematice urmînd ca reacţiunile din cuplele mecanismelor de clasa I-a, împreună cu forţele de echilibrare, să se determine la sfîrşit.

Metoda cinetostatică directă este cu atît mai laborioasă cu cît clasa grupei cinematice este mai mare. Dacă prin alegerea convenabilă a unor elemente conducătoare fictive dintre elementele mobile ale mecanismului, clasa acestuia se reduce, noilor grupe cinematice de clasă inferioară li se pot aplica metodele clasice cunoscute.

În lucrarea de faţă se prezintă un algoritm de calcul al reacţiunilor din cuplele cinematice ale mecanismelor plane de clasă superioară, care satisfac condiţia ca prin alegerea convenabilă a unor elemente conducătoare fictive dintre elementele mobile ale mecanismului, clasa acestuia să se reducă la 2, maximum 3.

2. Algoritmul de calcul

a) Pentru fiecare element condus al mecanismului, conform principiului lui D'Alembert se poate scrie:

$$\mathbf{P} + \sum \mathbf{R}_k + \mathbf{F}_i = 0, \qquad (k = 1,2,\ldots l), \tag{1}$$

unde $\mathbf{P}$ este rezultanta forţelor aplicate elementului, considerate cunoscute; $\mathbf{F}_i$ — forţa de inerţie rezultantă, considerată de asemenea cunoscută; $\mathbf{R}_k$ — reacţiunea cuplei cinematice; l — numărul cuplelor cinematice adiacente elementului.

Pentru fiecare element conducător, în ecuaţia de echilibru apare în plus ca necunoscută, forţa de echilibrare:

$$\mathbf{P} + \sum \mathbf{R}_k + \mathbf{F}_i + \mathbf{P}_e = 0. \tag{2}$$

În cazul cînd gradul de mobilitate al mecanismului este egal cu unitatea, forţa de echilibrare aplicată elementului conducător se poate calcula fără determinarea prealabilă a reacţiunilor, cu ajutorul metodei cunoscute sub numele de pîrghia lui Jukovski.

În felul acesta, din punctul de vedere al categoriei forţelor necunoscute ce apar în ecuaţiile de echilibru, elementele conducătoare nu se deosebesc de elementele conduse ale mecanismului, necunoscute fiind numai reacţiunile din cuplele cinematice.

Atunci cînd gradul de mobilitate a mecanismului este supraunitar, forţele de echilibrare aplicate elementelor conducătoare se pot calcula de asemenea cu ajutorul metodei pîrghiei lui Jukovski, ce se generalizează în modul arătat la punctul b).

Avînd în vedere cele de mai sus, se regrupează elementele mecanismului de studiat în grupe cinematice cu clasa 2, maximum 3, noile elemente conducătoare putînd fi apoi alese convenabil. Grupele cinematice noi formate, care conţin şi elementele conducătoare reale ale mecanismului iniţial, se vor rezolva după metodele cunoscute, deoarece în ecuaţiile de echilibru nu intervin ca necunoscute decît reacţiunile cuplelor cinematice.

La echilibrul elementelor conducătoare nou alese nu vor mai apare, evident, forţe de echilibrare.

b) Pentru a demonstra posibilitatea generalizării aplicării metodei pîrghiei lui Jukovski la mecanismele cu grad de mobilitate supraunitar, se introduc notaţiile:

n — numărul elementelor mobile ale mecanismului; p — numărul gradelor de mobilitate; $\mathbf{P}_i$ — încărcarea elementului i, care include şi inerţia; $\mathbf{P}_{e_j}$ — forţa de echilibrare aplicată elementului conducător j; $\mathbf{V}_{P_i}$ — viteza punctului de aplicaţie a forţei $\mathbf{P}_i$; $\mathbf{V}_{P_{e_j}}$ — viteza punctului de aplicaţie a forţei $\mathbf{P}_{e_j}$.

Dacă pe lîngă aceste forţe, asupra elementelor mai acţionează şi momente, ele se vor compune într-o forţă unică, iar dacă asupra unui element acţionează numai un moment, acesta se va înlocui cu două forţe egale şi de sens contrar.

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale sub forma metodei pîrghiei lui Jukovski se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{V}_{P_i} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{P}_{e_j} \cdot \mathbf{V}_{P_{e_j}} = 0. \tag{3}$$

Viteza punctului de aplicaţie a forţei de echilibrare $\mathbf{P}_{e_j}$ depinde de un singur parametru q_j, în timp ce viteza punctului de aplicaţie a forţei $\mathbf{P}_i$ depinde în general de p parametri, $(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_p)$, deci

$$\mathbf{V}_{P_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{dq_3}\frac{dq_3}{dt} + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_p}\frac{dq_p}{dt},$$

$\mathbf{r}_{P_i}$ fiind vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie a forţei $\mathbf{P}_i$.

Înlocuind în (3) şi grupînd termenii rezultă

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_1} + \mathbf{P}_{e_1}\frac{\partial \mathbf{r}_{P_{e_1}}}{\partial q_1}\right)\frac{dq_1}{dt} + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_2} + \mathbf{P}_{e2}\frac{\partial \mathbf{r}_{P_{e_2}}}{\partial q_2}\right)\frac{dq_2}{dt} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_p} + \mathbf{P}_{e_p}\frac{\partial \mathbf{r}_{P_e}}{\partial q_p}\right)\frac{dq_p}{dt} = 0.$$

Deoarece variaţia parametrilor $q_1, q_2, \ldots, q_p$ este independentă, caracterizînd mişcarea celor p elemente conducătoare ale mecanismului, rezultă ca soluţii ale ecuaţiei de mai sus egalitatea cu zero a parantezelor:

$$\sum_{i=2}^{n} \mathbf{P}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_j} + \mathbf{P}_{e_p} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{P_{e_j}}}{\partial q_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{4}$$

Aceasta se materializează prin faptul că forţa de echilibrare aplicată elementului conducător cu indice j se poate determina cu uşurinţă utilizînd metoda pîrghiei lui Jukovski, ce se aplică mecanismului dat, la care se fixează de batiu celelalte $p - 1$ elemente conducătoare.

Afirmaţia este valabilă deoarece derivatele $\partial \mathbf{r}_{P_i} / \partial q_j$ sînt nule pentru toate celelalte elemente conducătoare.

3. Aplicaţie

Fie de determinat reacţiunile din cuplele cinematice ale mecanismului de clasa a 4-a din fig. 1, format din 9 elemente şi 11 cuple cinematice de clasa a 5-a, cu două elemente conducătoare notate cu *1* şi *6*.

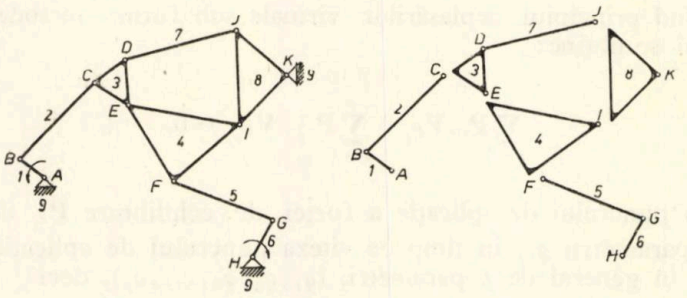


Fig. 1

Ecuaţiile de echilibru dinamic scrise direct pentru grupa de clasa a 4-a ordinul 3 nu se pot rezolva prin metodele clasice cunoscute folosite curent în cinetostatică deoarece numărul necunoscutelor ce intervin este prea mare. Dacă se calculează în prealabil forţele de echilibrare aplicate elementelor conducătoare reale *1* şi *6*, elementele mobile ale mecanismului se pot regrupa în 3 grupe de clasa a 2-a ordinul 2 şi anume:

a) grupa formată din elementele *1* şi *2* — cuplele *A B C*,

b) grupa formată din elementele *5* şi *6* — cuplele *E G H*,

c) grupa formată din elementele *3* şi *7* — cuplele *E D J*, care se tratează comod după metoda clasică, în ordinea enumerării.

Rămîn elementele conducătoare fictive *4* şi *8* care de asemenea se pot rezolva în această ordine.

Primită la 5 iunie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanisme şi organe de maşini

BIBLIOGRAFIE

1. Artobolevski I. I., *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*. Ed. tehn., Buc., 1955 (trad. din l. rusă).
2. Manolescu N. I., Maros D., *Teoria mecanismelor şi a maşinilor. Cinetostatica şi dinamica*. Ed. tehn., Buc., 1958.
3. Manolescu N. I., Iarca G., *O metodă de rezolvare cinetostatică a mecanismelor prin schimbarea punctului de reducere a forţelor*. Bul. Inst. polit. Bucureşti, **XXXI**, *4* (1970).

A GENERAL METHOD TO CALCULATE THE REACTIONS IN KINEMATIC COUPLINGS OF PLANE MECHANISMS

(Summary)

It is presented a new method for computing the reactions in the kinematic couplings of upper classes plane mechanisms that satisfy the condition: by a convenient choice of several fictitious driving linkages of the mechanism mobile linkages, its class is reduced to 2 maximum 3.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.822.7

PARTICULARITÉS CONCERNANT LE COMPORTEMENT DES ROULEMENTS À MOUVEMENT OSCILLATOIRE [1])

PAR

N. G. POPINCEANU et L. T. HOSTIUC

1. Introduction

Les paliers à roulements qui exécutent un mouvement oscillatoire en plan perpendiculaire sur l'axe du roulement se rencontrent fréquemment en technique; ainsi on peut citer: le palier de bielle pour des machines à piston, les paliers des transporteurs oscillants, les paliers à roulements de l'articulation à la cardan etc.

À la projection de tels mécanismes on signale des déficiences en ce qui concerne le choix et le calcul des roulements. Jusqu'à present il n'existe pas une méthode de calcul généralement valable pour les roulements à mouvement oscillatoire, la littérature de spécialité étant pauvre dans ce domaine.

Les méthodes de calcul proposées par B. V. Tzipkin [6] (1959), la firme NADELLA [7] (1963) et D. Reister [4] (1967) assimilent le mouvement d'oscillation réelle à un mouvement de rotation fictive, déterminant pour ce cas une charge dynamique équivalente qui produirait le même effet sur le roulement. La méthode de calcul proposée par J. H. Rumbarger [8] (1968), vérifiée par des essais sur des roulements à aiguilles, ne prend pas en considération toutes les particularités cinématiques et dynamiques des oscillations des roulements.

En ce qui s'en suit on présente les particularités fonctionneles des roulements radiaux et axiaux à mouvement oscillant et quelques considérations sur la taux de charge dynamique de base de ceux-ci.

Notations

D_k — diamètre du cercle de contact du corps de roulage avec le deux anneaux (cm)

$D_{i,e}$ — diamètre de l'anneau intérieur, respectivement extérieur, sur lequel se réalise le contact avec le corps de roulage (cm)

D_m — diamètre moyen du roulement (cm)

$\gamma = (D_k/D_m)\cos\alpha$

α — angle de contact (rad)

θ — angle d'oscillation (rad)

---

[1]) Communication présentée lors des sessions scientifiques de l'Usine „Rulmentul" de Brașov, le 25 avril 1969 et de l'Institut politechnique de Jassy, le 2—4 juillet 1970.

θ_{cr} — angle d'oscillation critique (rad)
$\gamma_0 = D_k/D_m$
F — force (N)
$Q(\psi)$ — charge sur le corps de roulage dans le point de contact avec les deux anneaux (**N**) (fig. 3)
ψ_0 — angle maximal de l'épure de charge pour un roulement radial (rad) (fig. 3)
$\varepsilon = \ddot{\theta}$ — accelération angulaire du mouvement d'oscillation (rad/s²)
I_k, I_0 — moment d'inertie massique du corps de roulage par rapport à l'axe d'oscillation du roulement respectif par rapport à l'axe propre d'oscillation (gr cm²)
$\omega = \dot{\theta}$ — vitesse angulaire d'oscillation (rad/s)
μ_0 — coefficient de frottement statique au glissement entre le corps de roulage et les aneaux du roulement
β — angle entre la direction de la charge radiale extérieure et la direction verticale (rad) (fig. 4)
G, M — poids respectivement masse du corps de roulage.
V — vitesse tangentielle (cm/s) (fig. 5)
$\mathcal{E}$ — valeur maximale de l'accélération angulaire ε_c du corps de roulage par raport au centre instantané de rotation (rad/s²)
$\bar{\varepsilon}$ — constante de la relation (4)
φ — angle qui délimite la zone de roulement sans glissement (rad) (fig. 3)
γ_1 — constante de la relation (19)
I_c — moment d'inertie massique du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation (gr. cm²)
$(\varepsilon_c)_i$ — accélération angulaire du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation pour lequel il apparaît le glissement sur l'aneau intérieur (rad)/s²)
$(\varepsilon_c)_a$ — accélération angulaire de glissement du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation (rad/s)
$\triangle$ — variation des espaces parcurus par le corps de roulage sur les deux anneaux due au glissement entre le corps de roulage et l'anneau intérieur
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} — moments d'inertie massiques par rapport aux axes xx, yy, zz, du corps de roulage pour un roulement axial (gr cm²) (fig. 7)
S — probabilité de vie à la fatigue de contact
C_{os} — taux dynamique de base du roulement à mouvement oscillant
p — exponent constant de la relation charge-durabilité
e — exponent Weibull de la courbe de distribution
L — durabilité de vie du roulement en mouvement d'oscillation (millions d'oscillations)

Indices

i — pour l'anneau intérieur
e — pour l'anneau extérieur
k — pour le corps de roulage

2. Angles critiques d'oscillation

2.1. Oscillation uniforme [2] (vitesse angulaire d'oscillation constante)

L'angle d'oscillation θ pour lequel les arcs de cercle de la gorge de roulement traversés par deux corps de roulage voisins font la jonction — c'est-à-dire quand l'angle $\theta_e = 2\pi/Z$ pour l'anneau extérieur (fig. 1 pour le cas *1*, *2*, *3* du tableau 1, et fig. 2 — pour le cas *4* du tableau 1), ou quand l'angle $\theta_i = 2\pi/Z$ pour l'anneau intérieur — s'appelle angle critique d'oscillation pour l'anneau respectif, $\theta = \theta_{cre}$, respectivement $\theta = \theta_{cri}$.

D'une manière analogue on peut aussi définir un angle critique d'oscillation pour le corps de roulage, qui est l'angle d'oscillation $\theta = \theta_{crk}$ pour

[2] Ce mouvement peut être réalisé à l'aide des moteurs hydrauliques.

Tableau 1

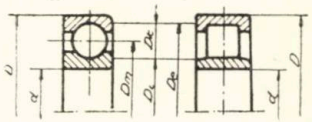
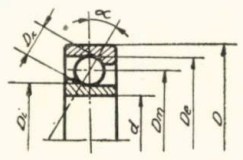
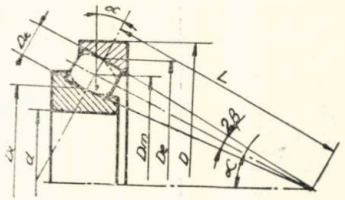
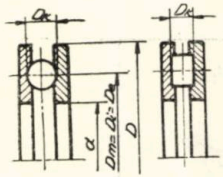
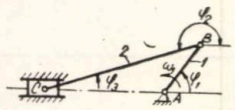
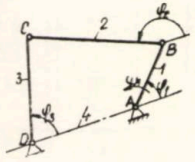
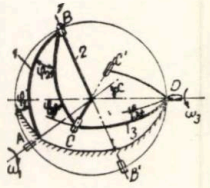
Nr. crt.	Le type de roulement	Esquisse du roulement	Relations de calcul
1	radial à une rangée ou à deux rangées de billes ou rouleaux cylindriques radial à aiguilles		$D_m = \frac{d+D}{2}$ $D_i = D_m - D_k$ $D_e = D_m + D_k = 0$ D_k = diamètre du corps de roulage
2	radial-axial à une ou à deux rangées de billes radial-oscillant à deux rangées de billes		$D_m = \frac{d+D}{2}$ $D_i = D_m - D_k \cos$ $D_e = D_m + D_k \cos$ D_k = diamètre de la bille
3	radial-axial à une rangée de rouleaux coniques radial-axial à une rangée de rouleaux-tonneau radial-oscillant à double rangées de rouleaux-tonneau axial-radial à rouleaux coniques ou à rouleaux-toneau		$D_m = 2L \sin$ $D_k = 2L \operatorname{tg}$ $D_i = D_m - D_k \cos$ $D_e = D_m + D_k \cos$
4	axial à billes avec effet simple ou double axial à rouleaux cylindriques		$D_m = D_i = D_e = \frac{d+D}{2} = 90°$ D_k = diamètre du corps de roulage

Tableau 2

Nr. crt.	Esquisse du mécanisme	Vitesse angulaire et accélération du mouvement d'oscillation	Exemple d'utilisation
1	*Mécanisme bielle-manivelle* 	$\dot{\omega}=\dot{\varphi}_3=-\omega_1\dfrac{l_1\cos\varphi_1}{l_2\cos\varphi_2}$ $\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varphi}_3=\dfrac{\omega_1^2 l_1\sin\varphi_1+\omega_2^2 l_2\sin\varphi_2}{l_2\cos\varphi_2}$	machines à piston
2	*Mécanisme quadrilatère plan* 	*Jointe D* $\dot{\omega}=\dot{\varphi}_3=\omega_1\dfrac{l_1\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{l_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)}$ $\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varphi}_3=\dfrac{\omega_1^2 l_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\omega_2^2 l_2-\omega_3^2 l_3\cos(\varphi_3-\varphi_2)}{l_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)}$ *Jointe C* $\dot{\omega}=\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3,\quad \ddot{\varepsilon}=\ddot{\varphi}_2-\ddot{\varphi}_3$ $\dot{\varphi}_2=-\omega_1\dfrac{l_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)}{l_2\sin(\varphi_2-\varphi_3)}$	transporteurs oscillants tables oscillantes axes oscillants à cames systèmes de commande mécanique et de distribution
3	*Mécanisme quadrilatère sphérique* 	*Jointes B et B'* $\dot{\omega}=\dot{\varphi}_{21}=-\omega_1\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi_1}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_1}$ $\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varphi}_{21}$ *Jointes C et C'* $\dot{\omega}=\dot{\varphi}_{32}=\omega_1\dfrac{\sin\alpha\sin\varphi_1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_1}}$ $\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varphi}_{32}$	jointes à cardan simples et multiples
4	*Mécanisme à coulisse oscillante*	$\dot{\omega}=\dot{\varphi}_3=\omega_1\dfrac{l_1}{l_3}\sin(\varphi_1-\varphi_3)$ $\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varphi}_3=-\dfrac{2\omega_3 V_c+\omega_1^2 l_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)}{l_3}$ où $V_c=-\omega_1 l_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)$	machines-outils tables oscillantes axes oscillants à cames systèmes de commande mécanique et de distribution

lequel le corps de roulage, pendant son mouvement de roulement entre les deux anneaux, est sollicité sur toute sa circomférence sans superposition, c'est-à-dire quand l'angle $\theta_k = \pi$ (fig. 1 et fig. 2).

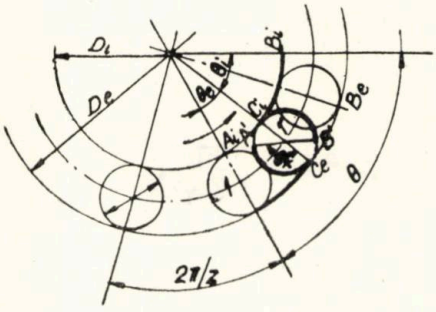


Fig. 1. — Les angles d'oscillation θ_e — pour l'anneau extérieur, θ_i — pour l'anneau intérieur, θ_k — pour le corps de roulage, correspondant à l'angle θ du mouvement d'oscillation d'un roulement radial, radial-axial, radial-oscillant et axial-radial.

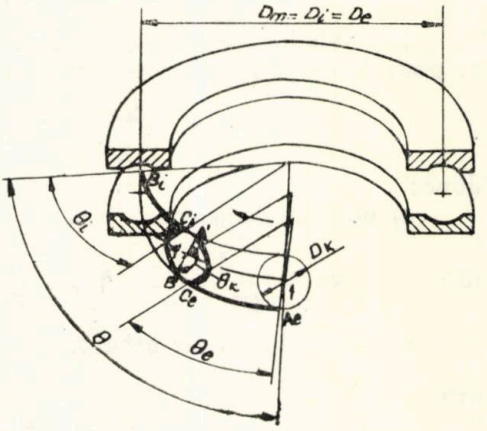


Fig. 2. — Les angles d'oscillation θ_e — pour l'anneau extérieur, θ_i — pour l'anneau intérieur, θ_k — pour le corps de roulage, correspondant à l'angle θ du mouvement d'oscillation d'un roulement axial.

Dans la fig. 1 on a représenté l'oscillation d'un roulement correspondant aux cas *1*, *2*, *3* du tableau 1, et dans la fig. 2 l'oscillation d'un roulement axial — cas *4* du tableau 1.

Le corps de roulage *1* arrivé dans la position *1'* détermine les angles θ_e, θ_i et θ_k qui délimitent les arcs des cercles parcourus respectivement sur l'anneau extérieur, sur l'anneau intérieur et sur le corps de roulage. Dans le cas du mouvement d'ocillation uniforme ($\omega = \dot{\theta} = \text{const.}$) les corps de roulage roulent sans glissement sur les deux anneaux. À l'aide des fig. 1 et 2 on peut ecrire

$$(1) \qquad \begin{cases} \overset{\frown}{A_e C_e} = \overset{\frown}{A' C_e} = \overset{\frown}{B' C_i} = \overset{\frown}{B_i C_i}, \\ \theta_i + \theta_e = \theta. \end{cases}$$

En résolvant le sistème d'équations (1) on détermine les valeurs des angles θ_e, θ_i et θ_k en fonction de l'angle d'oscillation θ .On trouve:

a) pour roulements radiaux (les cas *1, 2, 3* du tableau 1):

$$(2\,a) \qquad \begin{cases} \theta_i = \dfrac{\theta}{2}(1+\gamma), \quad \theta_e = \dfrac{\theta}{2}(1-\gamma), \quad \theta_k = \dfrac{\theta}{2\gamma_o}(1-\gamma^2), \\ \gamma = \dfrac{D_k}{D_m}\cos\alpha, \quad \gamma_o = \dfrac{D_k}{D_m}; \end{cases}$$

b) pour roulements axiaux (le cas *4* du tableau 1):

$$\theta_i = \theta_e = \frac{\theta}{2}, \quad \theta_k = \frac{\theta}{2\gamma_0}. \tag{2 b}$$

Les valeurs des angles critiques d'oscillation pour les deux anneaux et pour le corps de roulage résultent des relations (2) si:

$$\theta_i = \frac{2\pi}{Z}, \quad \theta_e = \frac{2\pi}{Z} \quad \text{et} \quad \theta_k = \pi,$$

donc:

a) pour roulements radiaux:

$$\theta_{cr\,i} = \frac{4\pi}{Z(1+\gamma)}, \quad \theta_{cr\,e} = \frac{4\pi}{Z(1-\gamma)}, \quad \theta_{cr\,k} = \frac{2\pi\gamma_0}{1-\gamma^2}; \tag{3 a}$$

b) pour roulements axiaux:

$$\theta_{cr\,i} = \theta_{cr\,e} = \frac{4\pi}{Z}, \quad \theta_{cr\,k} = 2\gamma_0\pi. \tag{3 b}$$

2.2. Oscillation non-uniforme

Les mouvements d'oscillation fréquement rencontrés en technique apparaissent entre les éléments de certains mécanismes dont la vitesse angulaire d'oscillation est variable pendant une période d'oscillation.

Aux corps de roulage des roulements montés dans les jointes oscillantes de ces mécanismes apparaissent des forces et des moments d'inertie qui peuvent provoquer un glissement entre les corps de roulage et les anneaux.

Dans le tableau 2 on présente la variation de la vitesse angulaire d'oscillation, pendant une période, pour quelques mécanismes rencontrés plus souvent dans la technique.

3. Particularités fonctionneles des roulements

3.1. Roulements radiaux

Dans la fig. 3 est représentée l'épure des pressions sur les deux anneaux d'un roulement radial [2]; la zone de charge de l'anneau, délimitée par l'angle $\pm\psi_0$, est décrite par l'équation

$$Q(\psi) = Q_{max}\left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos\psi)\right]^t, \tag{4}$$

ou $t = 3/2$ — pour les roulements à billes, $t = 1{,}1$ — pour les roulements à rouleaux [3], $\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\delta_a}{\delta_r}\operatorname{tg}\alpha\right]$, δ_a — est le déplacement axial du cen-

tre O sous l'action de la force axiale F_a, δ_r — le déplacement radial du centre O sous l'action de la force radiale F_r.

La fig. 4 représente l'oscillation d'un corps de roulage situé dans une position quelconque dans la zone chargée d'un roulement radial. Les moments des forces d'inertie du corps de roulage par rapport à l'axe d'oscillation du roulement, respectivement par rapport à l'axe propre d'oscillation, sont

$$M_{ik} = -I_k \varepsilon_H, \quad M_{i0} = -I_0 \varepsilon_k,$$

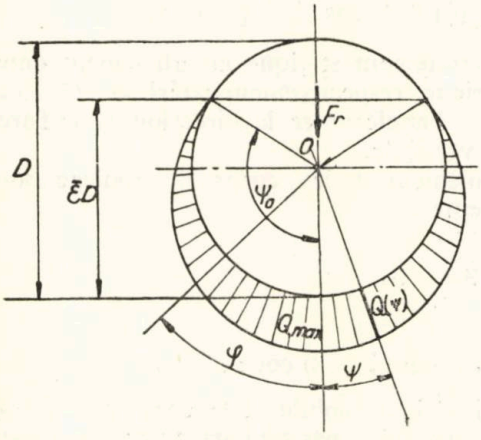


Fig. 3. — L'épure des pressions sur les deux anneaux d'un roulement radial.

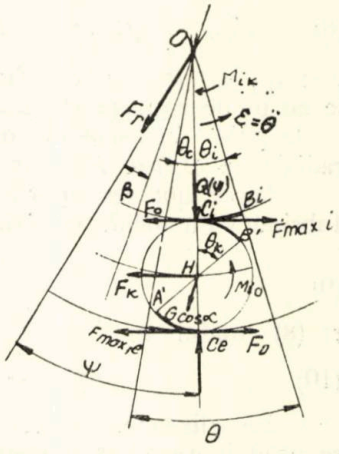


Fig. 4. — Les forces qui sollicitent un corps de roulage qui oscille avec l'angle θ dans la zone chargée d'un roulement radial.

où: I_k, I_o sont les moments d'inertie massique du corps de roulage par rapport à l'axe d'oscillation du roulement, respectivement l'axe propre d'oscillation, $I_k = I_o + M(D_m/2)^2$; M — la masse d'un corps de roulage; ε_H, ε_k — l'accélération angulaire du mouvement du corps de roulage par rapport à l'axe du roulement, respectivement l'axe propre d'oscillation.

Utilisant (2) il en résulte:

$$(5) \qquad \varepsilon_H = \ddot{\theta}_e = \frac{\varepsilon}{2}(1-\gamma), \quad \varepsilon_k = \ddot{\theta}_k = \frac{\varepsilon}{2\gamma_o}(1-\gamma^2), \quad \varepsilon_k = \varepsilon_H \frac{1+\gamma}{\gamma_0}.$$

Le moment M_{ik} est équivalent au moment produit par une force F_k appliquée au centre de gravité H, de valeur:

$$(6) \qquad F_k = \frac{2I_k \varepsilon_H}{D_m}.$$

Le moment M_{i0} est équivalent au moment produit par un couple de forces $F_0 D_k$ appliquées aux point de contact du corps de roulage avec les deux anneaux, vù:

$$F_0 = \frac{I_0 \varepsilon_k}{D_k}. \tag{7}$$

La force de frottement maximal qui peut agir entre le corps de roulage et l'anneau intérieur, respectivement extérieur, est:

$$F_{\max i} = Q(\psi)\,\mu_{0i}, \quad F_{\max e} = [Q(\psi) + G\cos(\psi - \beta)\cos\alpha]\,\mu_{0e}, \tag{8}$$

où: μ_{0i}, μ_{0e} sont les coefficients de frottement statique au glissement entre le corps de roulage et l'anneau intérieur, respectivement extérieur; $G = Mg$ — le poids du corps de roulage; β — l'angle entre la direction de la force radiale de charge F_r et la direction verticale.

Parce que les anneaux du roulement et les corps de roulage sont fabriqués du même matériel, on accepte

$$\mu_{0i} = \mu_{0e} = \mu_0 \tag{9}$$

et (8) conduit à

$$F_{\max e} = F_{\max i} + G\mu_0 \cos(\psi - \beta)\cos\alpha. \tag{10}$$

Le glissement entre l'anneau intérieur mobile et le corps de roulage se produit quand le moment de la force $F_{\max i}$ par rapport au centre instantané de rotation C_e, (fig. 4), est équilibré par les moments résultés des forces F_0, F_k et G. De la condition d'équilibre par rapport au point C_e il résulte:

$$F_{\max i} = F_0 + \frac{1}{2}F_k + \frac{1}{2}G\sin(\psi - \beta)\cos\alpha. \tag{11}$$

Le glissement du corps de roulage sur l'anneau extérieur se produit quand

$$F_{\max e} = F_0. \tag{12}$$

Le glissement entre l'anneau intérieur mobile et le corps de roulage se produit toujours avant l'apparition du glissement sur l'anneau extérieur fixe. Pour que le glissement apparaisse tout d'abord sur l'anneau extérieur, sur l'annnau intérieur existant un mouvement de roulement sans glissement, il faut que:

$$F_{\max i} > F_0 + \frac{1}{2}F_k + \frac{1}{2}G\sin(\psi - \beta)\cos\alpha. \tag{13}$$

À l'aide de (12) et (10) on peut écrire

(14) $$F_{\max i} = F_0 - G\mu_0 \cos(\psi - \beta)\cos\alpha$$

et utilisant (14) et (13) il résulte:

(15) $$-G\mu_0 \cos(\psi - \beta) > \frac{1}{2} F_k + \frac{1}{2} G \sin(\psi - \beta)\cos\alpha,$$

ce qui n'est pas possible car $\mu_0 \ll 1$.

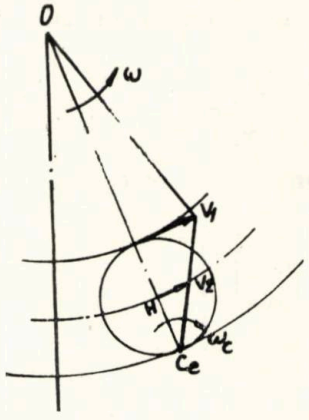


Fig. 5. — La distribution des vitesses sur les anneaux et le corps de roulage dans un roulement radial.

Après l'apparition du glissement sur l'anneau intérieur la force F_0 est constante et donc la condition de glissement sur l'anneau extérieur (12) ne peut se réaliser.

En remplaçant (5) ... (8) dans (11) on obtient:

(16) $$Q(\psi)\mu_0 = \frac{I_0}{D_k}\varepsilon_k + \frac{I_k}{D_m}\varepsilon_H + \frac{1}{2} G \sin(\psi - \beta)\cos\alpha.$$

La fig. 5 fournit:

(17) $$\omega_c = \frac{V_1}{D_k} = \frac{\omega}{2}\frac{D_i}{D_k} = \frac{\omega(1-\gamma)}{2\gamma_0}, \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon(1-\gamma)}{2\gamma_0}.$$

Utilisant (17), la relation (5) conduit à:

(18) $$\varepsilon_k = \varepsilon_c(1+\gamma), \quad \varepsilon_H = \varepsilon_c \gamma_0.$$

En remplaçant (18) dans (16) on obient la valeur de l'accélération ε_c pour laquelle apparaît le glissement entre le corps de roulage et l'anneau intérieur:

(19) $$\begin{cases} (\varepsilon_c)_i = \gamma_1 Q(\psi) - \gamma_2 \sin(\psi - \beta)\cos\alpha, \\ \gamma_1 = \dfrac{\mu_0 D_k}{I_0(1+\gamma) + I_k \gamma_0^2}, \quad \gamma_2 = \dfrac{G\gamma_1}{2\mu_0}. \end{cases}$$

La charge $Q(\psi)$ pour laquelle existe encore le roulement dans glissement sur l'anneau intérieur, même quand le corps de roulage a l'accélération angulaire ε_c maximale devant cette charge, est donnée par:

$$Q(\psi) = \frac{\mathscr{E}}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin(\psi - \beta) \cos\alpha, \quad \text{où} \quad \mathscr{E} = |(\varepsilon_c)_{\max}|. \tag{20}$$

Des relations (20) et (4) on détermine l'angle 2φ de la zone à l'intérieur de laquelle se produit le roulement sans glissement sur l'anneau intérieur:

$$Q_{\max}\left[1 - \frac{1}{2\bar{\varepsilon}}(1 - \cos\varphi)\right]^t = \frac{\mathscr{E}}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin(\varphi - \beta). \tag{21}$$

On peut négliger le terme $(\gamma_2/\gamma_1)\sin(\varphi - \beta)$ parce que la force $Q_{\max} \gg G$. Alors

$$\cos\varphi = 1 - 2\bar{\varepsilon}\left[1 - \left(\frac{\mathscr{E}}{\gamma_1 Q_{\max}}\right)^{1/t}\right]. \tag{22}$$

Si

$$\frac{\mathscr{E}}{\gamma_1 Q_{\max}} = 1, \tag{23}$$

l'angle $\varphi = 0$ et tous les corps de roulage compris dans la zone chargée du roulement $\pm\psi_0$ roulent par glissement sur l'anneau intérieur; ce cas est possible quand l'accélération angulaire du mouvement d'oscillation est très grande ou quand la charge extérieure, respectivement $Q_{\max}$, est très petite.

Le mouvement de glissement d'un corps de roulage qui oscille dans la zone $\psi_0 - \varphi$ (fig. 3), est présenté dans le diagramme cinématique de la fig. 6. Sur l'axe des abscises est inscrit le temps T d'un cycle d'oscillation et sur l'axe des ordonnées — l'accélération angulaire ε_c du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation C_e (ligne pointillée) et la vitesse tangentielle de l'anneau intérieur (ligne continue), à l'échelle respective.

En traçant, à l'échelle des accélérations angulaires, la valeur de l'accélération d'apparition du glissement sur l'anneau intérieur $(\varepsilon_c)_i$ on voit que dans l'intervalle OB l'accélération $\varepsilon_c < (\varepsilon_k)_i$ et, par conséquent, il se passe un roulement sans glissement du corps de roulage sur l'anneau intérieur, la courbe OAB représentant non seulement la vitesse tangentielle de l'anneau intérieur mais aussi celle du corps de roulage.

Dans le point B' l'accélération negative ε_c du corps de roulage dépasse en valeur absolue l'accélération de glissement $(\varepsilon_c)_i$ et par conséquent celui-ci glisse sur l'anneau intérieur, se mouvant indépendemment sous l'action des forces d'inertie accumulées. En même temps, commençant par le point B', entre le corps de roulage et l'anneau intérieur agit la force de frottement $Q(\psi)\mu_1$ en sens contraire au mouvement de glissement, où

μ_1 est le coefficient de frottement dynamique au glissement. L'accélération angulaire du mouvement de glissement du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation C_e (fig. 4) est donnée par

$$(24) \qquad I_c(\varepsilon_c)_a = (F_0)_i D_k + (F_k)_i \frac{D_k}{2} + G\cos\alpha \frac{D_k}{2}\sin(\psi - \beta) - Q(\psi)\mu_1 D_k,$$

où $(F_0)_i$ et $(F_k)_i$ sont les valeurs des forces F_0 et F_k pour $\varepsilon_c = (\varepsilon_c)_i$; I_c — le moment d'inertie massique du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation C_e ($I_c = I_0 + M(D_k/2)$).

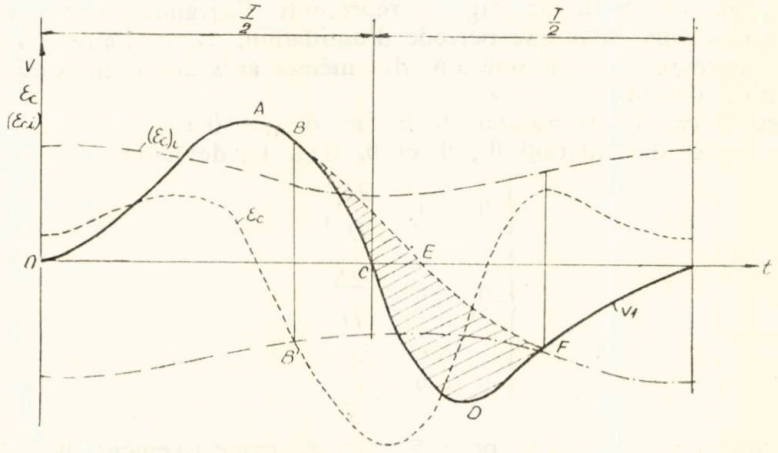


Fig. 6. — Diagramme cinématique du mouvement d'un corps de roulage compris dans la zone de charge $\psi_0 - \varphi$ d'un roulement radial.

Des relations (11) et (24) il résulte :

$$(25) \qquad (\varepsilon_c)_a = Q(\psi) D_k \frac{\mu_0 - \mu_1}{I_c}.$$

L'accélération angulaire absolue du corps de roulage par rapport au centre instantané de rotation C_e est :

$$(26) \qquad \varepsilon_c = (\varepsilon_c)_i - (\varepsilon_c)_a.$$

Du moment de l'apparition du glissement entre l'anneau intérieur et le corps de roulage, la vitesse tangentielle du corps de roulage V_1, (fig. 5) diminue par rapport à l'accélération angulaire donnée par (26) et représentée dans la diagramme cinématique de la fig. 6 par la courbe pointillée *BEF*. Au point *F* les vitesses tangentielles de l'anneau intérieur et du corps de roulage deviennent égales et parce qu'au point *F* l'accélération angulaire $\varepsilon_c < (\varepsilon_c)_i$, le roulement se rétablit.

La surface BDF du diagramme $V-t$ représente la valeur du déplacement du corps de roulage par rapport a l'anneau intérieur. Planimétrant la surface à l'échelle respective on détermine l'arc de cercle, en cm, qui représente le déplacement du corps de roulage dans son mouvement de glissement par rapport à l'anneau intérieur dans une periode d'oscillation T.

La variation Δ des espaces parcourus par le corps de roulage sur les deux anneaux, respectivement les arcs des cercles $\overset{\frown}{A_eC_e} = \overset{\frown}{A'C_e} = \overset{\frown}{B'C_i} = \overset{\frown}{B_iC_i}$ (fig. 1) est donnée par

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2, \tag{27}$$

où Δ_1 = l'aire BCE de la fig. 5 représente l'agrandissement des arcs de cercle ci-dessus, dans une periode d'oscillation, Δ_2 = l'aire $CEFD$ de la fig. 5 représente la diminution des mêmes arcs de cercle pendant une période d'oscillation.

Dans le cas du diagramme de la fig. 6 $\Delta_1 < 0$ car $\Delta_2 > \Delta_1$.

Les angles d'oscillation θ_e, θ_i et θ_k (fig. 1), deviennent:

$$\begin{cases} \theta'_i = \theta_i + \dfrac{2\Delta}{D_i}, \\ \theta'_e = \theta_e + \dfrac{2\Delta}{D_e}, \\ \theta'_k = \theta_k + \dfrac{2\Delta}{D_k}. \end{cases} \tag{28}$$

En utilisant (2) et (28), pour $\theta'_i = 2\pi/Z$, respectivement $\theta'_e = 2\pi/Z$ et $\theta'_k = \pi$, résulte la valeur des angles critiques d'oscillation pour un corps de roulage qui oscille dans la zone chargee $\psi_0 - \varphi$ (fig. 3):

$$\begin{cases} \theta_{cr\,i} = \dfrac{4\pi}{Z(1+\gamma)} - \dfrac{4\Delta}{D_e(1+\gamma)}, \\ \theta_{cr\,e} = \dfrac{4\pi}{Z(1-\gamma)} - \dfrac{4\Delta}{D_i(1-\gamma)}, \\ \theta_{cr\,k} = \dfrac{2\pi\gamma_0}{1-\gamma^2} - \dfrac{4\gamma_0\Delta}{D_k(1-\gamma^2)}. \end{cases} \tag{29}$$

La relation (29) devient identique à (2) quand $\Delta = 0$, ce qui se réalise en trois situations:

$\Delta_1 = \Delta_2$ — pour tous les corps de roulage — cas de l'oscillation harmonique du roulement (l'accélération angulaire ε est une fonction cosinusoïdale);

$\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ — pour tous les corps de roulage — cas de l'oscillation unifome;

$\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ – seulement pour les corps de roulage qui roulent sans glissement dans la zone $\pm \varphi$ (fig. 3).

Sur les anneaux du roulement, respectivement sur tous les corps de roulage, il existe une charge continue quand se réalisent les angles critiques d'oscillation pour le dernier corps de roulage qui oscille dans la zone $\psi_0 - \varphi$. Les angles critiques d'oscillation d'un roulement radial qui oscille à une vitesse angulaire variable périodiquement sont données par (29), où $\Delta = \Delta_{max} =$ = la variation des arcs de cercle $\widehat{A_e C_e} = \widehat{A' C_i} = \widehat{B' C_i} = \widehat{B_i C_i}$ (fig. 1), parcourus par le corps de roulage le moins chargé de la zone $\psi_0 - \varphi$ (fig. 3).

3.2. Roulements axiaux

Dans la fig. 7 est représentée la sollicitation d'un corps de roulage d'un roulement axial. Sur tous les corps de roulage agit une force constante :

$$Q = \frac{F_a}{Z}. \tag{30}$$

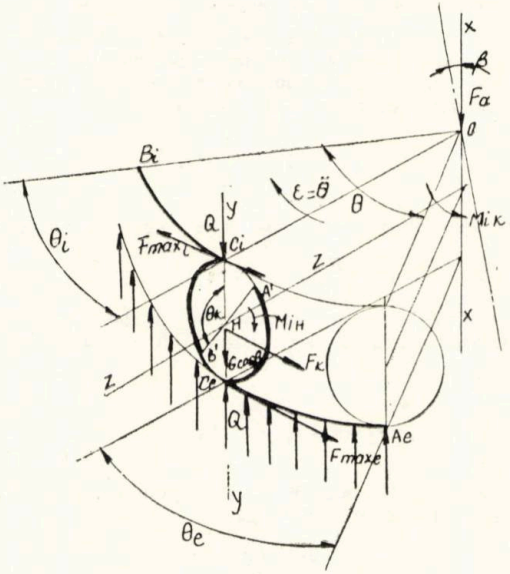


Fig. 7. – Les forces qui sollicitent un corps de roulage d'un roulement axial qui oscille avec l'angle θ.

Les moments des forces d'inertie du corps de roulage par rapport à l'axe d'oscillation du roulement $x - x$, respectivement par rapport à l'axe propre d'oscillation $z - z$ (fig. 7) sont $M_{ik} = -I_{xx}\varepsilon_H$, $M_{iH} = -I_{zz}\varepsilon_k$, où I_{xx}, I_{zz} sont les moments d'inertie massique par rapport aux axes $x - x$, respectivement $z - z$ ($I_{xx} = I_{yy} + M(D_m/2)^2$), ε_H, ε_k – les accélérations angulaires d'oscillation du corps de roulage par rapport à l'axe $x - x$, respectivement $z - z$. Utilisant la relation (2) on peut noter que

(31) $$\varepsilon_H = \dot{\theta}_e = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \varepsilon_k = \dot{\theta}_k = \frac{\varepsilon}{2\gamma_0}.$$

Le moment des forces d'inertie M_{ik} est remplacé par le moment de la force F_k, appliquée au centre de gravité H du corps de roulage, de valeur :

(32) $$F_k = \frac{2I_{xx}\varepsilon_H}{D_m}.$$

Le moment des forces inertie M_{iH} est remplacé par le couple $F_0 D_k$, avec :

(33) $$F_0 = \frac{I_{zz}\varepsilon_k}{D_k}.$$

Les forces maximales de frottement qui peuvent agir entre le corps de roulage et es deux anneaux sont :

(34) $$F_{\max i} = Q\mu_0, \quad F_{\max e} = (Q + G\cos\beta)\mu_0, \quad F_{\max i} = F_{\max e} - G\cos\beta\,\mu_0,$$

où β est l'angle entre la direction de la charge extérieure F_a et la direction verticale (fig. 7); μ_0 — coefficient de frottement statique au glissement entre le corps de roulage et les deux anneaux ; on accepte que ce coefficient a la même valeur pour les deux anneaux.

Par analogie avec les roulements radiaux on détermine la condition d'apparition du glissement entre l'anneau intérieur et le corps de roulage :

(35) $$F_{\max i} = F_0 + \frac{1}{2}F_k.$$

Le glissement entre l'anneau extérieur fixe et le corps de roulage se produit quand

(36) $$F_{\max e} = F_0.$$

Si le glissement du corps de roulage apparaît tout d'abord sur l'anneau extérieur cela signifie qu'il faut satisfaire simultanément les relations (36) et l'inégalité $F_{\max i} > F_0 + F_k/2$. Utilisant (34) dans ce cas, il résulte :

(37) $$-G\cos\beta\,\mu_0 > \frac{1}{2}F_k.$$

La condition de l'inégalite (37) peut être réalisée pour certaines accélérations d'oscillation très petites, au desous de la valeur donnée par

(38) $$\varepsilon = -\frac{2D_m G\cos\beta\,\mu_0}{I_{xx}},$$

mais pour les accélérations petites on ne peut pas réaliser la condition de glissement (36) puisque la valeur de la force F_0 est trop faible.

Par analogie avec les roulements radiaux, on discute le cas où le glissement apparît seulement entre l'anneau intérieur mobile el le corps de roulage. Remplaçant (32) ... (34) dans (35), il résulte :

(39) $$Q\mu_0 = \frac{I_{zz}\varepsilon_k}{D_k} + \frac{I_{xx}\varepsilon_H}{D_m}.$$

À l'aide de la fig. 8 on peut écrire:

$$\omega_c = \frac{V_1}{D_k} = \frac{\omega D_m}{2D_k} = \frac{\omega}{2\gamma_0}, \qquad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon}{2\gamma_0}, \tag{40}$$

pendant que de (31) et (40) on obtient:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_c, \qquad \varepsilon_H = \varepsilon_c \gamma_0. \tag{41}$$

Remplaçant les relations (41) dans (39) il résulte la valeur de l'accélération angulaire ε_c (notée par $(\varepsilon_c)_i$) pour laquelle apparaît un glissement entre le corps de roulage et l'anneau intérieur:

$$(\varepsilon_c)_i = \frac{Q\mu_0 D_k}{I_{zz} + I_{xx}\gamma_0^2}. \tag{42}$$

La valeur de $(\varepsilon_c)_i$ (42) est constante pour tous les corps de roulage. Si

$$|(\varepsilon_c)_{max}| > (\varepsilon_c)_i, \tag{43}$$

se produit un glissement entre le corps de roulage et l'annenu intérieur.

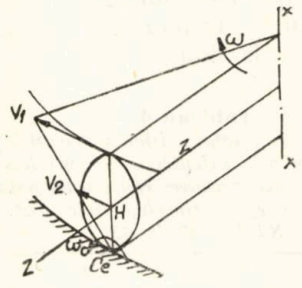


Fig. 8 — Distribution des vitesses sur l'anneau intérieur mobile et sur le corps de roulage pour un roulement axial.

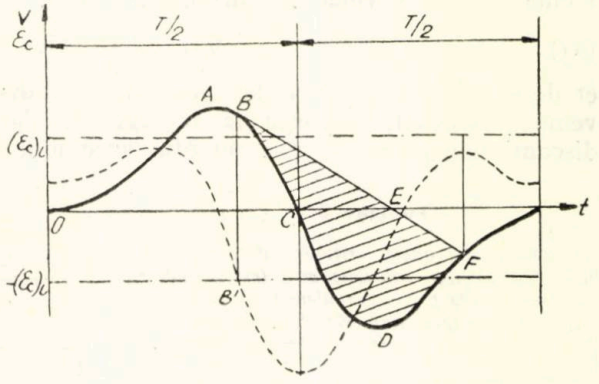


Fig. 9 — Diagramme cinématique du mouvement d'un corps de roulage d'un roulement axial qui oscille à une vitesse angulaire variable périodiquement et qui remplit la condition donné par (43).

Dans la fig. 9 on a représenté le diagramme cinématique du mouvement de roulement par glissement d'un corps de roulage qui oscille dans les conditions de (43); il est analogue au diagramme de la fig. 6, à la difference que l'accélération $(\varepsilon_c)_i$ est constante, donc les courbes desinées par pointillé-ligne dans la fig. 6 deviennent des droites dans la fig. 9; la courbe de la vitesse de glissement *BEF* (fig. 6) devient aussi une droite (fig. 9).

En faisant les mêmes raisonnements que pour le diagrame de la fig. 9 l'on obtient:

$$(\varepsilon_c)_a = \frac{QD_k}{I_c}(\mu_0 - \mu_1). \tag{44}$$

Par analogie avec les roulements radiaux on peut noter pour tous les corps de roulage $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$, où Δ_1 = l'aire *BCE* (fig. 9) et Δ_2 = l'aire *CEFD* (fig. 9).

Les valeurs des angles d'oscillation θ_e, θ_i et θ_k (fig. 2) deviennent:

$$\theta'_e = \theta'_i = \theta_i + \frac{2\Delta}{Dm}, \quad \theta'_k = \theta_k + \frac{2\Delta}{Dk}. \tag{45}$$

Les angles critiques d'oscillation s'obtiennent des relations (45) pour $\theta_i = \theta_e = 2\pi/Z$, respectivement $\theta_k = \pi$:

$$\theta_{cri} = \theta_{cre} = \frac{4\pi}{Z} + \frac{4\Delta}{Dm}, \quad \theta_{crk} = 2\gamma_0\pi - \frac{4\Delta\gamma_0}{Dm}. \tag{46}$$

Les cas le plus fréquemment rencontrés dans la technique sont les mouvements d'oscillations pour lesquels $\theta < 90°$. Ainsi fonctionnent en général les roulements du palier de bielle des machines à piston, les roulements des transporteurs oscillants et les roulements des mécanismes de commande des machines a travailler.

Appliquant les relations (3) aux roulements radiaux à bille et à rouleaux de différents fabrications [10], [11], [12], on constate que $\theta_{cre} > 90°$, comme on a indiqué dans le tableau 3. En même temps, pour les roulements radiaux normalisés, on constate que:

$$\theta_{cri} < \theta_{crk} < \theta_{cre} \tag{47}$$

et donc, pour la plupart des roulements radiaux qui fonctionnent à mouvement oscillant, la gorge de roulage de l'anneau extérieur est chargée discontinuellement, ou tout au plus avec jonction à la limite.

Tableau 3

Les valeurs des angles critiques d'oscillation θ_{cri}, θ_{crk}, θ_{cre} — calculées avec les relations (3) pour les dix premiers roulements radiaux a billes à une rangée, série 63, STAS 3041-66

Symbole	Z	θ_{cri}	θ_{crk}	θ_{cre}
6 300	6	90	135	180
6 301	6	92	122	173
6 302	7	80,5	111	143
6 303	7	80,2	110	143
6 304	7	80,7	108	142
6 305	8	72	97,5	120
6 306	8	72,5	94	119
6 307	8	73	89	117,5
6 308	8	73	88	117
6 309	8	73,5	89	117,5

Tableau 4

Les valeurs des angles critiques d'oscillation $\theta_{cri} = \theta_{cre}$ et θ_{crk} calculées avec les relations (3) pour les dix premiers roulements axiaux à bille à effet simple, série 512, STAS 3921-63

Symbole	Z	θ_{crk}	$\theta_{cri} = \theta_{cre}$
51 200	8	50	90
51 201	9	45	80
51 202	10	42	72
51 203	10	38,2	72
51 204	11	38	65,5
51 205	12	37	60
51 206	13	33	55
51 207	13	29,8	55
51 208	14	29,2	51,5
51 209	15	27,4	48

Au cas que les roulements fonctionnent à mouvement d'oscillation non-uniforme, la valeur des angles critiques d'oscillation augmente proportionnellement à l'accélération du mouvement, conformément à (29).

Appliquant les relations (3) aux roulements axiaux a billes et a rouleaux [10]... [12], on constate que

$$\theta_{crk} < \theta_{cre} \tag{48}$$

et aussi qui pour les roulements petites les angles critiques sont grands.

Il est nécessaire de traiter tous les cas possibles de fonctionnement des roulements radiaux et axiaux à mouvement d'oscillation, c'est-à dire $\theta \gtrless \theta_{cre}$, parce que la situation $\theta > \theta_{cre}$ est un cas particulier beaucoup moins rencontré.

4. Corps de roulage portants

4.1. Mouvement d'oscillation uniforme

Pour les roulements radiaux qui fonctionnent à mouvement d'oscillation uniforme (ω = constant), à la différence du cas de la rotation, pas tous les corps de roulage entrent dans la zone chargée du roulement (fig. 3); par contre pour les roulements axiaux, tous les corps de roulage participent à la réception de la charge extérieure de chargement.

Le nombre des corps de roulage portants est donné par:

a) roulements radiaux:

$$\begin{cases} \theta \leqslant \theta_{cre}, \quad Z_p = \dfrac{\psi_0 Z}{\pi}; \\ \\ j\theta_{cre} < \theta \leqslant (j+1)\theta_{cre}, \qquad Z_p = \dfrac{\psi_0 Z}{\pi} + j; \end{cases} \tag{49 a}$$

b) roulements axiaux:

$$Z_p = Z. \tag{49 b}$$

4.2. Mouvement d'oscillation non-uniforme

Le nombre des corps de roulage portants est:

a) roulements radiaux:

$$\begin{cases} Z_p = Z_{p_1} + Z_{p_2}, \quad Z_{p_1} = \dfrac{\varphi Z}{\pi}; \\ \\ \theta \leqslant \theta_{cre}, \quad Z_{p_2} = \dfrac{Z}{\pi}(\psi_0 - \varphi); \\ \\ j\theta_{cre} < \theta \leqslant (j+1)\theta_{cre}, \quad Z_{p_2} = \dfrac{Z}{\pi}(\psi_0 - \varphi) + j; \end{cases} \tag{50 a}$$

b) roulement axiaux:

(50 b) $$Z_p = Z,$$

où Z_{p_1} est le nombre de corps des roulage qui oscillent dans la zone $\pm\varphi$ (fig. 3); Z_{p_2} — le nombre des corps de roulage qui oscillent dans la zone $\pm(\psi_0 - \varphi)$.

5. Considérations sur le taux de charge dynamique de base et la durabilité de vie des roulements à mouvement oscillant en liaison avec les corps de roulage portants

Pour établir la relation de calcul de le taux de charge dynamique de base des roulements à mouvement de rotation, on considère que les deux annneaux [2] sont les éléments soumis a la détérioration du roulement due a la fatigue de contact; la probabilité de résistance à la fatigue de contact des corps de roulage est maximale, c'est-à-dire egale à 1. Cette hypothèse peut être appliquée aux roulements axiaux à mouvement d'oscillation parce que $Z_p = Z$.

Pour les roulements radiaux à billes et à rouleaux en mouvement d'oscillation, la probabilité de résistance des corps de roulage ne peut être considérée égale à 1, parce que, dans ce cas, il y a des corps de roulage qui ne sortent pas de la zone chargée du roulement et en général $Z_p < Z$.

L'apparition des fissures de fatigue pour les éléments du roulement est un phénomène indépendant pour chaque élément à part, donc, on peut noter:

(51) $$S = S_i S_e S_p,$$

où S est la probabilité de resistance à la fatigue de contact du roulement en ensemble, S_i, S_e, S_p — les probabilités de résistance à la fatigue de contact de l'anneau intérieur, respectivement de l'anneau extérieur et des corps de roulage portants.

De (51) il résulte:

(52) $$\log\frac{1}{S} = \log\frac{1}{S_i} + \log\frac{1}{S_e} + \log\frac{1}{S_p}.$$

En définissant le taux de charge dynamique de base du roulement en mouvement d'oscillation analogue au mouvement de rotation [2], on trouve que:

(53) $$\frac{1}{C_{0s}^w} = \frac{1}{C_i^w} + \frac{1}{C_e^w} + \frac{1}{C_p^w},$$

où C_i, C_e, C_p — sont les taux de charge dynamique de base en mouvement d'oscillation de l'anneau intérieur, respectivement de l'anneau extérieur

et des corps de roulage portants; $w = pe$ — exposant constant; p — exposant dans la relation durabilité-charge $L = (C_{0s}/Q)^p$; e — exposant Weibull de la courbe de distribution [2].

La probabilité de résistance à la fatigue de contact S_p est formée des probabilités de résistance des Z_p corps de roulage portants, donc:

$$S_p = S_{k_1} S_{k_2} \ldots S_{k_{Z_p}}, \tag{54}$$

où S_{k_j} représente la probabilité de résistance d'un corps de roulage portant. Alors (53) devient:

$$\frac{1}{C_{0s}^w} = \frac{1}{C_i^w} + \frac{1}{C_e^w} + \sum_1^{Z_p} \frac{1}{C_{kj}^w}. \tag{55}$$

Dans le cas des roulements axiaux, la charge étant constante pour tous les corps de roulage, on peut considérer que les probabilités de résistance des Z_p corps de roulage sont égales, donc:

$$\frac{1}{C_{0s}^w} = \frac{1}{C_i^w} + \frac{1}{C_e^w} + Z \frac{1}{C_k^w}, \tag{56}$$

où C_k est le taux de charge dynamique de base d'un corps de roulage.

Il reste a particulariser les relations (55) et (56) pour tous les cas possibles d'oscillation.

6. Conclusions

1. Le mouvement d'oscillation des roulements ne peut être équivalent à un mouvement de rotation, comme suppossent les méthodes de calcul présentées dans [6], [7], [4], parce que:

a) pas tous les corps de roulage sont portants, $Z_p < Z$;

b) pour $\theta < \theta_{cr}$ le chargement des éléments du roulement est discontinu.

2. Pour établir le taux de charge dynamique de base des roulements à mouvement oscillant, donc une méthode de calcul, il faut aussi prendre en considération la probabilité de résistance des corps de roulage portants.

Reçue le 18 juillet 1970

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanismes et de
Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Eschman B., *Die Wälzlagerpraxis*. R. Oldenburg, 1953.
2. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Rolling Bearings*. Acta Polytechnica Stockholm, Mech. Eng., ser. 1, 3, 7 (1947).
3. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Roller Bearings*. Acta Politechnica Stockholm, Mech. Eng., 2, 4, *96* (1952).

4. Reister D., *Die äquivalente Lagerbelastung für oszillierende Wälzlager.* Konstruktion, *12* (1967).
5. Smith R. J., *Bearing Factors for Oscillating Uses.* Automation, *2* (1962).
6. Бейзельман Р. Д., Цыпкин Б. В., *Подшипники качения. Справочник.* Машгиз, М, 1960.
7. * * * *Wissenswertes über die Berehnung der Nadella-Nadelbauelement.* Maschine und Werkzeug — Europa Tehnik, *7* (1963—1964).
8. Rumbarger J. G., Jones A. B., *Dynamic Capacity of Oscillating Rolling Element Bearings.* J. of Lubrication Techn., ASME, **90**, series *F* (January 1968).
9. Harris C., Crede C., *Şocuri şi vibraţii,* Ed. tehn., Buc., 1968 (trad. de l'anglaise).
10. *** *Catalog de rulmenţi,* MICM-*004*-R.S.R.
11. *** *Wälzlagerkatalog FAG-41 000,* Deutschland.
12. *** *Catalogue No 200 E III SKF,* Sweden.

PARTICULARITĂŢI ALE COMPORTĂRII RULMENŢILOR CU MIŞCARE OSCILANTĂ

(Rezumat)

Se analizează particularităţile cinematice şi dinamice ale rulmenţilor radiali şi axiali cu mişcare oscilantă.

Se propune o relaţie de calcul a capacităţii dinamice de bază a rulmenţilor radiali şi axiali cu bile şi role, care ia în consideraţie particularităţile funcţionale ale mişcării de oscilaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621.43.01

SOME RAFINEMENTS REGARDING EXHAUST IN SUPERCRITICAL REGIME IN TWO-STROKE ENGINES

BY

MARCEL GUTMAN

1. Introduction

The present paper points out errors occuring in the calculation of the gas exchange process in two-stroke cycle engines, subsequent to the arbitrary choice of expansion polytropic exponents.

After making some specifications on expansion polytropic exponents, a relationship is established for the first time between the value of polytropic exponent m, occuring in the calculation of supercritical exhaust regime, and the engine indicator diagram.

Index of Abbreviations

f — instantaneous cross-sectional area of exhaust ports [m²]
V — instantaneous volume of the cylinder [m³]
μ_e — discharge coefficient of exhaust ports
m — expansion polytropic exponent for variable mass process
p — cylinder gas pressure [N/m²]
p_r — mean pressure of exhaust manifold gases [N/m²]
T — absolute temperature of cylinder gases [°K]
R — gas specific constant J/(Kg °K)
K — gas adiabatic exponent corresponding to exhaust

$$\psi_{max} = \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{1}{K-1}} \sqrt{\frac{2K}{K+1}} = \text{const.}$$

t — time [s]
ρ — instantaneous density of cylinder gases [Kg/m³]
G — gas mass in engine cylinder [Kg]
α — rotation angle of crankshaft (degrees)
S_c — fictitions stroke of cylinder corresponding to volume of combustion space, V_c [m]
S_α — piston stroke corresponding to angle α [m]
$S_0 = 2r$ — total stroke of the piston [m],
D — cylinder bore [m]
λ — ratio between crank radius and connection-rod lenght
b — indicator of exhaust starting point
cr — indicator of parameters in critical section and end of exhaust process in critical regime
n — crankshaft speed (RPM)
B — width of exhaust ports [m]

The last few years the calculation of blowdown exhaust period in impulse supercharched two-stroke cycle engines, has acquired a peculiar interest, due to the progress of those engines.

Orljn schows that in high speed engines the process of blowdown gas exhaust may be estimated taking into account only the supercritical exhaust regime [1].

With a view to working out different methods required by the calculation of gas exchange process (the necessary time cross-sectional area, gas parameters etc.) certain simplifying hypotheses have been used which obviously gave rise to some errors.

Thus, the simplifying hypothesis introduced in Orljn's method referring to the polytropic course of the cylinder process, with an m exponent = constant, results in important errors, because of the sometimes arbitrary choice of the value of that exponent.

Applying the following relation, deduced by Orljn for calculating the time-cros-sectional area necessary to supercritical exhaust regime [2]

$$(1) \quad A_1' = \int_{t_b}^{t_{cr}} f\,dt = \frac{0.118\,V}{\mu_e\,(m-1)\,\psi_{max}\sqrt{T_b}} \left[\left(\frac{p_b}{p_r}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(\frac{K+1}{2}\right)^{\frac{K}{K-1}\,\frac{1-m}{2m}} - 1 \right]$$

in the case of a two-stroke cycle engine with electric ignition, rated power $N = 9$ HP, speed $n = 3000$ RPM, and adopting for m four different values the following values given in Table 1 are obtained for A_1'.

Table 1

m	1,30	1,40	1,50	1,667
A_1' m² s	$0.380\,10^{-6}$	$0.358\,10^{-6}$	$0.342\,10^{-6}$	$0.314\,10^{-6}$

Rojanskii [1] applied relation

$$(2) \quad A_0 = \int_{t_b}^{t_s} f\,dt = \frac{0.059\,V}{(m-1)\,\mu_e\sqrt{T_b}\,\psi_{m\ x}} \left\{ \left(\frac{p_b}{p_r}\right)^{\frac{m-1}{2m}} \left[2\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}\,\frac{m-1}{2m}} - 0.4\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}\,\frac{2.5\,(m-1)}{m}} + 0.4\left(\frac{p_r}{p_b}\right)^{\frac{2.5\,(m-1)}{m}} \right] - 2 \right\}$$

for the whole blowdown exhaust period in a D 100 engine with 2000 HP

and 810 RPM and found $A_0 = 3.12\ 10^{-5}\ m^2s$ if $m = k = 1.3$ and $A_0 = 1.37\ 10^{-5}\ m^2s$ if $m = 1.35$ and $k = 1.3$. For this type of engine, the available time-cross-sectional area for blowdown exhaust period is $1.4\ 10^{-5}\ m^2s$, so that value $m = 1.35$ leads in this case to results closer to reality.

In using other calculation methods [3], [4], considering that cylinder gas evolution is adiabatic and where exponent is equal to k, errors are sure to occur in some cases.

It is clear that errors introduced in calculations by an arbitrary choice of the polytropic exponent m will be the higher in proportion as p_b/p_r ratio is higher.

The difficulties encountered when choosing the mean value of the expansion polytropic exponent m are accounted for by the fact that mass variation of cylinder charge is added to factors influencing the variation of m, as a result of gas exhaust. The process occuring in the cylinder starting with exhaust should be considered by a rigorous discussion, as a thermodynamic process, in which a mass and energy exchange with the exterior medium is simultaneously taking place.

2. Connection between Polytropic Exponent and Engine Indicator Diagram

In the following lines, some specifications are made concerning expansion polytropic exponents which may be involved in the study of the exhaust process and the way in which some of them may be determined is presented.

Thus, to avoid confusion, the following expansion polytropic exponents should be distinguished:

a) A polytropic exponent, continously varying during the exhaust process, being expressed by [5]:

$$m = \frac{dp/p}{dv/v}. \tag{3}$$

b) The mean polytropic exponent, considered constant for part of the process or for the whole process. This exponent is denoted by m_1. Polytropic curve equations, affected by exponent m and m_1 may be written taking into account the specific volume.

c) As against exponents m and m_1, the notion of variable polytropic exponent is introduced for the conventional polytropic process effected by the variable mass expanded in the variable volume of the cylinder. Denoting that exponent by m', the equation of that conventional polytropic curve is:

(4) $$p\,V^{m'} = \text{const.}$$

d) A mean exponent of the conventional polytropic curve is also defined, being considered constant for the whole process and denoted m_1'. The equation of the conventional polytropic curve, where the mean value of the exponent is constant, is:

(5) $$p\,V^{m_1'} = \text{const.}$$

The only exponents which may be directly determined from indicator diagrams are m' and m_1'.

As calculations involve, as seen above, polytropic exponents m and especially m_1, it is necessary to find linking relations between these exponents and indicator diagrams.

To establish such a relation, one starts from expressions giving instantaneous values of cylinder volume and cylinder gas density, written as a function of α, crankshaft rotation angle, as follows:

(6) $$V = V_c + \frac{\pi D^2}{4} S_\alpha = \frac{\pi D^2}{4}\left[S_c + r\,(1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin^2\alpha)\right] = F_1(\alpha),$$

(7) $$\rho = \frac{G}{V} = G \Big/ \left\{\frac{\pi D^2}{4}\left[S_c + r\,(1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin^2\alpha)\right]\right\} = F_2(\alpha).$$

The expression of instantaneous gas mass G for the supercritical flow regime results:

(8) $$G = G_b - \frac{30}{\pi n}\int_{\alpha_b}^{\alpha} f_{cr}\, W_{cr}\, \rho_{cr}\, d\alpha.$$

To express gas density in the critical cross-section depending on cylinder gas density the following relations are taken into account:

$$\frac{p_{cr}}{\rho_{cr}^K} = \frac{p}{\rho^K}, \quad \frac{p}{p_{cr}} = \left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{K-1}} = \nu_{cr}, \quad \rho_{cr} = \frac{\rho}{\nu_{cr}^{1/K}}.$$

After effecting the appropriate substitutions, Eq. (8) appears like

(9) $$G = G_b = \frac{120}{\pi^2 D^2 n\, \nu_{cr}^{1/K}} \int_{\alpha_b}^{\alpha} \mu_e\, W_{cr}\, f\, \frac{G}{S_c + r\left(1 - \cos\alpha + \frac{1}{2}\lambda\sin\alpha\right)}\, d\alpha = F_3(\alpha).$$

Substituting ρ by function $F_2(\alpha)$ in relation (3), one obtains:

$$m = \left(\frac{dp}{p}\right) \Big/ \left(\frac{F_2'(\alpha)\, d\alpha}{F_2(\alpha)}\right) = \frac{1}{p}\,\frac{dp}{d\alpha}\,\frac{F_2(\alpha)}{F_2'(\alpha)}. \tag{10}$$

This relation establishes the connection between the value of the polytropic exponent m and indicator diagrams.

To facilitate the calculus of the integral involved in (9), interval $\alpha_{cr} - \alpha_b$ is divided in smaller intervals

$$\alpha_{cr} - \alpha_b = (\alpha_{cr} - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_z - \alpha_b)$$

and for each of therm, the mean value of temperature in the critical cross-section, T_{cr}, is calculated.

The critical flow velocity of the gas is determined by

$$W_{cr} = \sqrt{K R T_{cr}}. \tag{11}$$

Temperature T_{cr} is calculated depending on T temperature of cylinder gases and T temperature is determined by a first approximation taking into account a recommended value of the mean polytropic exponent m_1.

It is clear that in engines with a higher p_b/p_{cr} ratio, the number of subdivisions of the $\alpha_b - \alpha_{cr}$ interval will be greater.

It is advisable that mean flow velocity of gases for each portion of the interval should not differ by more than 2...3 % from the values of gas flow velocities at extreme points of the studied interval.

By dividing that interval into portions and by considering adequate values of discharge coefficients μ_e for the respective portions, the accuracy of the calculations increases [6].

Taking into account the above mentioned facts, it is worthy of note that G value is determined by step-by-step solving each end point of the portions subdividing the interval, and replacing every time G_b by the gas amount existing in the cylinder at the initial point of the considered interval and μ_e and W_{cr} by appropriate mean values.

In the case of two-stroke cycle engines with rectangular cross section exhaust ports, calculation relations are simplified if mean values W_{cr} and μ_{em} are used. Thus relation (8) written for the interval $i-1$, i appears as

$$G = G_{i-1} - \frac{120\,\mu_{em}\,W_{cr}\,B}{\pi^2 D^2 n\, \nu_{cr}^{1/K}} \int_{i-1}^{i} \frac{S_0 - r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right)}{S_0 + r\left(1 - \cos\alpha + \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right)}\, G\, d\alpha. \tag{12}$$

In the same way, after required substitutions and calculations Eq. (9) becomes:

$$m = \frac{1}{p}\frac{dp}{d\alpha}\left[S_c + r\left(1 - \cos\alpha + \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right)\right] \Big/ \left\{\frac{120\,\mu_{em}\,W_{cr}\,B}{\pi^2 D^2 n \nu_{cr}^{1/K}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[r\left(1 - \cos\alpha - \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right) - S_0\right] - r\,(\sin\alpha + \lambda \sin\alpha\cos\alpha)\right\}. \tag{13}$$

If only indicator diagrams $p = f(V)$ are available, Eq. (13) should be changed accordingly.

Thus factor $dp/d\alpha$ may be expressed as:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{dp}{dV}\frac{dV}{d\alpha}. \tag{14}$$

Taking into account Eq. (6) one abtains:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{dp}{dV}\frac{\pi D^2}{4} r\,(\sin\alpha + \lambda \sin\alpha\cos\alpha). \tag{15}$$

By substituting factor $dp/d\alpha$ of relation (13) with the value expressed by (15) one obtains:

$$m = \frac{1}{p}\frac{dp}{dV}\left\{\frac{\pi D^2}{4} r\,(\sin\alpha + \lambda \sin\alpha\cos\alpha)\left[S_c + r\left(1 - \cos\alpha + \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right)\right]\right\} \Big/$$

$$\Big/ \left\{\frac{120\,\mu_{em}\,W_{cr}\,B}{\pi^2 D^2 n\,\nu_{cr}^{1/K}}\left[r\left(1 + \cos\alpha - \frac{1}{2}\lambda \sin^2\alpha\right) - S_0\right] - r\,(\sin\alpha + \lambda \sin\alpha\cos\alpha)\right\} \tag{16}$$

Eqs. (13) and (16) are the first to establisch a connection between the indicator diagram of a two-stroke cycle engine and the value of polytropic exponent m.

Depending on values m, calculated with the help of those relations, the mean values of polytropic exponents m_1 involved in calculations of gas exchange process in two-stroke cycle engines may be determined.

It is, therefore, necessary, that for every existing type of two-stroke cycle engines indicator diagrams to be plotted and to calculate the values of m and m_1, respectively, by means of the proposed method. By publishing the values of m and m_1 respectively, it will become possible to make more accurate estimations when calculating exhaust processes in the supercritical regime.

Since blowdown gas exhaust process may be calculated for high speed engines considering only the supercritical exhaust regime [1] and since the calculation of blowdown exhaust period is highly interesting for impulso-supercharged engines, it may be observed that the accurate determination of exponents m and m_1 will enable more accurate and rigorous calculations.

The conventional polytropic exponent m_1' may be accurately determined, as already shown, on the basis of the indicator diagram.

When the engine indicator diagram is not available, polytropic exponent m_1' may be calculated approximately for a certain interval of the flow process in supercritical regime. Thus, considering interval $i-1$, i, characteristic equations written for cylinder gas contents for points $i-1$ and i are:

$$p_{i-1} V_{i-1} = G_{i-1} R T_{i-1}, \qquad p_i V_i = G_i R T_i. \tag{17}$$

The equation of the conventional polytropic curve for the interval $i-1$, i, with mean exponent m_1' is

$$p_{i-1} V_{i-1}^{m_1'} = p_i V_i^{m_1'} . \tag{18}$$

By finding the logarithm of expression (18) and effecting the required substitutions, one finds the following expression for m_1':

$$m_1' = 1 + \log\left(\frac{G_{i-1}}{G_i}\,\frac{T_{i-1}}{T_i}\right) \Big/ \log\frac{V_i}{V_{i-1}} . \tag{19}$$

3. Conclusions

1. Errors introduced in calculating the time-cross-sectional areas required by supercritical regime by arbitrarily adopting mean polytropic exponents m are pointed out.

2. Some specifications are made on expansion polytropic exponents which may occur in the study of the exhaust process.

3. A connection is established for the first time between the indicator diagram and the value of the polytropic exponent m, involved in the calculation of supercritical state exhaust. This connection is materialized by Eqs. (13) and (16).

Received December 7, 1970

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Internal Combustion Engines

REFERENCES

1. Рожанский Г. С., *К уточнению методики расчета процессов свободного выпуска двухтактных двигателей внутреннего сгорания.* Изв. ВУЗ, Маш., I, 117—122 (1967).
2. Орлин А. С., *Двухтактные легкие двигатели.* Машгиз, М., 1950.
3. Schweitzer P. H., *Scavenging of Two-stroke Cycle Diesel Engines.* Macmillan & Co, New York, 1949.
4. List H., *Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschinen der Zweitakt.* Springer Verlag, Wien, 1950.

5. Мамонтов М. А., *Вопросы термодинамики тела переменной массы*. Оборонгиз, М., 1961.
6. Gutman M., *Studiul variaţiei coeficienţilor de debit pentru unele canale şi ferestre de la motoarele în doi timpi*. Cons. de maşini, *9*, 572-574 (1969).

UNELE PRECIZĂRI PRIVIND EVACUAREA ÎN REGIM SUPRACRITIC LA MOTOARELE ÎN DOI TIMPI

(Rezumat)

Se analizează erorile introduse în calcule prin alegerea uneori arbitrară a exponentului politropic care intervine în calculul procesului de schimb de gaze la motoarele în doi timpi. Se fac unele precizări asupra exponenţilor politropici de destindere care pot interveni în studiul procesului de evacuare şi se arată modul în care unii dintre aceştia pot fi determinaţi.

Se propune o metodă de determinare a exponenţilor politropici din timpul procesului de evacuare în regim supracritic bazată pe diagrama indicată, $p = f(V)$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 621.48.038

DISPLACEMENT TRANSDUCERS FOR STUDYING THE INJECTION SYSTEMS ON COMPRESSION IGNITION ENGINES [1])

BY

EMIL GAIGINSCHI, AURELIAN SIMIONESCU, AL. ŞTIURCĂ
and CONDRAT-ADRIAN HOMUTESCU

1. General Review

In the experimental study of the injection systems on compression ignition engines an important part is played by the visualization, measurement and recording of the moving parts displacement. In this respect the main points are the injection needle displacement and the delivery valve of the injection pump. These are small displacements (some tenths of milimeter for the injection needle, and some milimeters for the delivery valve) and during a very short time (10^{-3} s as order of magnitude).

For measuring and recording the displacements of the injection needle and delivery valve, a special apparatus is needed — adapted to the specific features of such measurements. The displacement transducers used with this purpose, as any other transducers, must meet two important conditions:

1. Not to distort the studied signal, which is ussually transformed into an electric parameter, beyond certain limits;

2. The transducer insertion in the system has not to modify the normal conditions of operation beyond practically discernable limits.

The transducers used for studying the moving parts of the injection systems are performed currently on photoelectric, inductive, capacitive or tensometric principles.

Schematicaly, the photoelectric transducer used for studying displacements consists of a photoelectric cell illuminated by a light sourse and an opturator of light flux placed between the source and the photoelectric cell. The light flux, modulated by the obturator which is moving with the studied part, is intercepted by the photoelectric cell, from where the electric signal, reproducing the displacement patern, is picked up by an adequate electric scheme.

The Hungarian Company „Elektronika" [8] produces a photoelectric transducer for the displacement needle. It is of type IAE — 144 and it contains the photoelectric cell of type 03 CV and an incandescence lamp of type T. 7537. The electric signal is amplified by an amplifier of the piezoelectric osciloscope IAN — 101 (made by the same company) and represented on the oscilograph screen. The sensibility of the whole system is such that for a displacement of 20 microns of the injection needle, a displacement of 1 mm is obtained for the light spot on the cathodic tube screen. The transducer presents a linear characteristic for the injection needle displacements up to 2 mm.

---

[1]) Presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, September 28—30, 1967.

Roughly similar characteristics are presented by the transducer of type FPN – 2, used for the injection needle displacement, made by the Research Institute ŢNITA [3] in the Soviet Union on the basis of the photoelectriccell STV – 3 and the incandescence lamp ST – 32.

For recording the injection needle displacement other transducers of photoelectric type [2], [4], and inductive or capacitive type [1], [3], are also used.

The photoelectric transducers used for recording the delivery valve displacement consist of a modified deliverv connection, in which there are mounted an electric bulb and a photoelectric cell in a channel. The obturation of light flux is achieved by a rod, tightly attached to the valve. Such transducers are made by the Swiss Company Sulzer [1], the Research Institute GOSNITI [3] in the Soviet Union and other makers of measuring instruments.

To study the displacement of the delivery valve, inductive [5] as well as capacitive transducer [7] are also used. In principle, the capacitive transducer used with this purpose consists of a variable electric capacitor with one of the plates connected to the earth (usually the valve itself) and the other plate fixed and insulated, mounted in the immediate vicinity of the valve. The electric capacity is determined by the delivery valve position. The capacitor is mounted either in an oscillating circuit, to modulate the frequency of a high-frequency generator, or in a bridge arrangement or even in a simple arrangement of high-frequency voltage division.

We present here transducers used with photographying on the cathode-ray osciloscope screene, made by the authors for studying the displacement of the injection needle and delivery valve.

2. Transducer for the Injection Needle Displacement

The mechanical part of the transducer was performed in conformity with Fig. 1. The transducer was fed at 80 V anodic voltage and connected to the direct current amplifier of the osciloscope PM–1, made by VEB–Zwönitz Company G.D.R. [9]. The transducer has such a sensibility that a 1 mm displacement of the light spot on the screen corresponds to a displacement of 20 microns of the injection needle, at maximum amplification ratio. The electrical scheme of the transducer set up is shown in Fig. 2.

The transducer calibration was done by measuring the light spot displacement on the screen for known displacements of the needle. The known values of needle displacements varied stepwise by 0.1 mm and were reproduced by introducing in the injector body of a series of rings of fixed thickness which limited the needle lift. The calibration line of the transducer is presented in Fig. 3.

The transducer was provided with a water cooled screen to avoid superheating during his operation on engine.

The main advantages of the performed transducer are:

1. Easy acces to the principal control points (slit opturated by the slide valve, photoelectric cell, illuminating bulb);

2. High sensibility, due to the prolonged shape of the window;

3. Use of easy obtainable devices (illuminating bulb from tractors, photoelectric cell from a projection apparatus);

4. By an adequate design of the geometric dimensions of the main parts it is possible to replace them by others ones with similar characteristics.

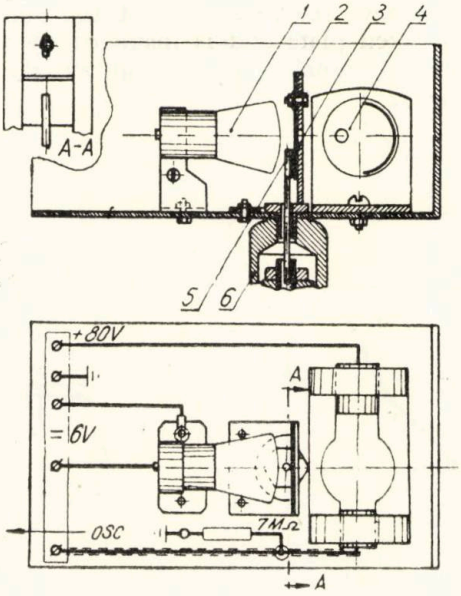


Fig. 1.—Photoelectric transducer for the injection needle displacement. *1*—illuminating bulb (6V, 30W), *2*— opaque wall with slit, *3*— slide valve obturating the light flux, *4*— photoelectric cell (type ŢG-3), *5*—injection needle extension, *6* — metallic body of the injector.

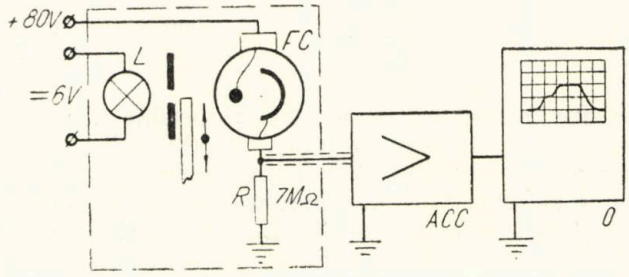


Fig. 2 — Electrical scheme of the photoelectric transducer for the injection needle displacement. *L* — electric lamp, *FC* — photoelectric cell, *ACC* — direct current amplifier, *R* — load resistance, *O* — cathode-ray osciloscope.

3. Transducer for the Delivery Valve Lift

The mechanical part of the transducer (Fig. 4) includes the valve *11*, which represents the moving plate of the variable capacitor and is bond to earth by its contact with the remaining of the pump, and the ring *6*, which represents the fixed plate and is insulated by the rings *5* and *7* and from which the electrical signal is picked up by the contact *10* posed through the insulator *4*.

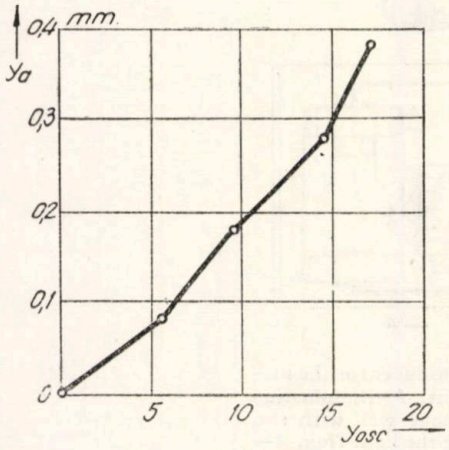


Fig. 3—Calibration line of the photoelectric transducer for the injection needle displacement: y_a—injection needle displacement, y_{osc} — number of division on the osciloscope screen.

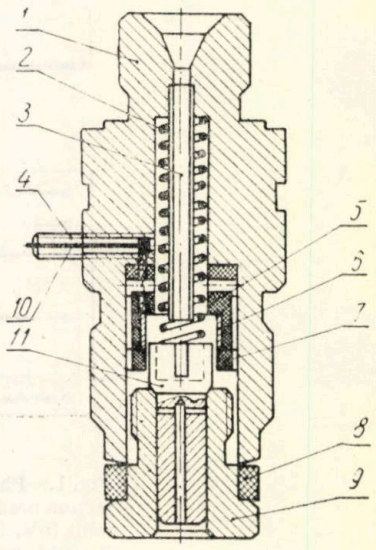


Fig. 4 — Capacitive transducer for the lift of the delivery valve. *1* — modified delivery connection, *2* — spring, *3*—check for the valve lift, *4* — insulator, *6* — ring, *5* and *7* — insulating rings, *8* — sealing gasket, *9* — valve chair, *10*—electric contact, *11* — valve.

To make the transducer as sensible as posible i. e. the variance of capacity between the extreme positions of the valve to have its highest value, the ring *6* was provided with a diameter very close to that of the valve head and a clearance of 0.08 mm was achieved between these parts and filled with a dielectric (diesel-oil). In this way a capacity of 10 cm for the closed position, and a capacity of 16 cm for the lifted position of the valve were obtained (measured values).

The capacitive transducer was included into a scheme of voltage division (Fig. 5). As a high-frequency voltage source a generator of type KU—856 was used. This is part of the piezoelectric installation PE—852

made by VEB—Zwönitz Company G. D. R. [7]. The generator with an internal impedance of 500 KOhm gives a voltage of 10 V to a frequency of 100 KHz.

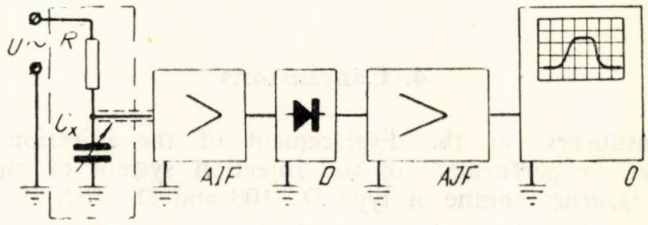


Fig. 5 — The electrical scheme of the capacitive transducer. C_x — transducer capacity, R — load resistance, AIF — high-frequency amplifier, D — detector, AJF — low-frequency amplifier, O — cathode-ray osciloscope, U — high-frequency voltage source.

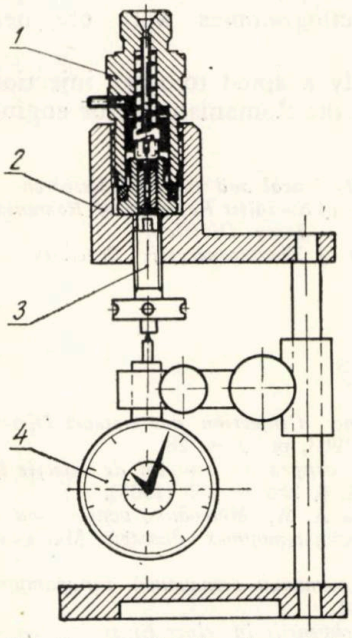


Fig. 6 — Calibration device for the capacitive transducer of the valve lift. *1* — transducer, *2* — body, *3* — micrometric screw, *4* — micrometer.

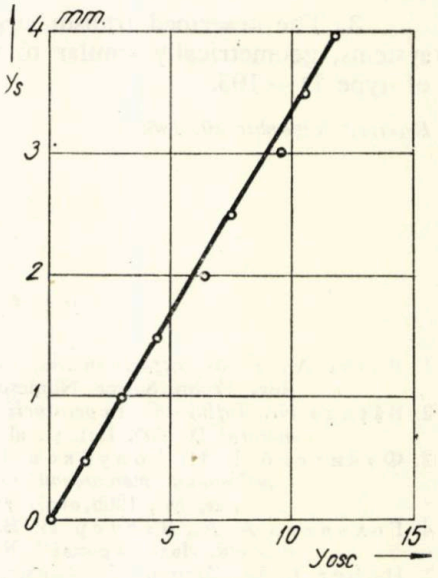


Fig. 7 — Calibration line for capacitive transducer of the delivery valve lift. y_s — delivery valve lift, y_{osc} — number of divisions on the osciloscope screen.

The transducer calibration was done by a micrometric device (Fig. 6) which allows the displacement of the valve at fixed values.

The calibration line obtained experimentally on the cathode-ray oscilloscope of type PM—1 [9] is given in Fig. 7.

4. Conclusions

1. Transducers for the displacement of the injection needle and delivery valve are performed for the injection system of the Romanian compression ignition engine of type D—103 and D—107.

2. There were obtained good performances in recording the displacements of valve and needle in tests made on stand and motor. Fig. 8 presents for examplification two oscilogrammes obtained by these transducers. The displacement oscilogrammes are accompanied by the pressure curves of variation in the injection pipe obtained by a piezoelectric transducer on the osciloscope PM — 1 (pump of type U24 FS — 8×10 with an injector of type IG—4×0.275 and the injection pipe 410 mm at 900 rpm and maximum injection flow-rate). The oscilogrammes were obtained on stand.

3. The described transducers may be easily adapted to other injection systems, geometrically similar to the system on the Romanian tractor engine of type D — 103.

Received November 20, 1969

Center of Technical and Physical Research
of the Academy of Socialist Republic of Romania,
Jassy Division,
Department of Thermoenergetic Processes

REFERENCES

1. Bassi A., *Études experimentales relatives aux sistèmes d'injection des moteurs Diesel.* Rev. Techn. Sulzer, Numero de recherches 1963, pp. 7 — 28.
2. Băţaga N., *Influenţa temperaturii combustibilului asupra procesului de injecţie la motorul D—103.* Bul. şt. al Inst. polit. Cluj, **8**, 255 — 265 (1965).
3. Файнлейб Б. Н., Голубков И. Т., Ключев Л. А, *Методика испытании и исследовании топливной аппаратуры автотракторных дизелей.* Машиностроение, М., 1965, стр. 133—138.
4. Гольверк А. А., Вагнер И. В., *Методика испытанци топливной аппаратуры дизелей.* Изд. „Урожай", Киев, 1964, стр. 40.
5. Huber E. W., *Messung der Hubbewegung eines Druckventils in einer Einspritzpumpe.* Motortehnische Z., **24**, *8*, 284 — 285 (1963).
6. Löbel M., Coman V., *Aplicaţiile industriale ale oscilografului catodic.* Ed. tehn., Buc., 1959, pp. 309 — 319.
7. Русинов Р. В., *Конструкция и расчёт дизельной топливной аппаратуры.* Машиностроение, М.—Л., 1965, стр 127.

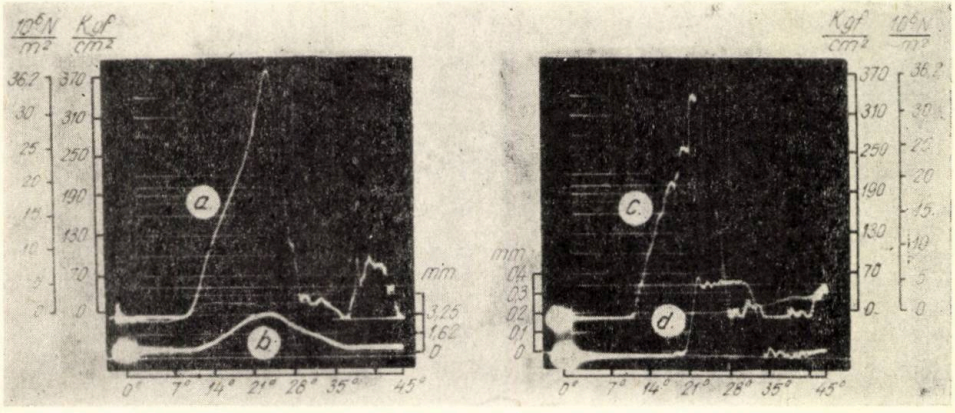


Fig. 8 — Oscilogrammes obtained with the performed transducers: *a* — pressure at pump, *b* — delivery valve lift, *c* — pressure at injector, *d* — injection needle lift.

8. * * * *PIEZOGRAPH, Piezoelectrischer Vierstrahldrukindicator zur Messung von Schnellablaufenden Druckanderungen Type IAN — 101.* Electronica Budapest, 1967, S. 26 (Bedienanweisung)
9. * * * *Piezoelectrische Messeinrichtung PM—1.* VEB Messgerätewerk Zwönitz, D.D.R., 1966 (Bedienanweisung).

TRADUCTOARE DE DEPLASARE PENTRU STUDIUL EXPERIMENTAL AL SISTEMELOR DE INJECŢIE DE PE MOTOARE CU APRINDERE PRIN COMPRESIUNE

(Rezumat)

Se prezintă traductoare pentru înregistrarea deplasării supapei de refulare şi a acului de injecţie al sistemelor de injecţie pe motoare cu aprindere prin compresiune, realizate de autori. Sînt descrise construcţia lor mecanică, schemele electrice şi metodele de etalonare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z.

UN NOU TIP DE MAŞINĂ SEMIAUTOMATĂ DE ASCUŢIT BURGHIE ELICOIDALE DUPĂ PROCEDEUL CILINDRO-ELIPTIC

DE

GH. CAŞLER, VITALIE BELOUS, N. GOJINEŢCHI, BORIS PLĂHTEANU, MIRCEA COZMÎNCĂ, V. LUPUŞOR, P. BRÎNZĂ, GH. ZMEU, GH. COJOCARU şi MIHĂIŢĂ STAN

1. Lucrarea de faţă reprezintă un rezultat a preocupărilor mai largi ale Catedrei de maşini-unelte şi scule din Institutul politehnic Iaşi, concretizate prin studii teoretice şi cercetări experimentale [1], [2], asupra metodelor clasice de ascuţire a burghielor elicoidale şi prin elaborarea de procedee, maşini şi dispozitive de concepţie originală, în scopul obţinerii unor progrese în acest domeniu.

Obiectivul acestor preocupări îl constituie generalizarea ascuţirii mecanice a burghielor elicoidale, ale căror avantaje, din punctul de vedere al asigurării productivităţii, preciziei, reducerii consumului de scule şi, implicit, al reducerii preţului de cost al operaţiei de găurire, au fost precis stabilite.

Analiza complexă a metodelor clasice de ascuţire, şi anume: conică (variantele Bankoft-Washborne şi Waissker), cilindrică (metoda Blau), elicoidală, plană şi dublu-plană, precum şi a rezultatelor obţinute cu numeroasele maşini realizate pe baza acestor metode, a permis să se tragă concluzia că generalizarea ascuţirii mecanice poate fi impulsionată prin elaborarea unor metode originale, care să satisfacă cît mai multe criterii de optimalitate, legate atît de ascuţirea cît şi de exploatarea acestor tipuri de scule. Aceste concluzii au stat la baza elaborării procedeului de ascuţire cilindro-eliptic, a unor prototipuri de maşini [1], [3], [4] şi a unei maşini de ascuţit burghie elicoidale, realizată la Uzina „Nicolina"—Iaşi [1]).

---

[1]) Maşina a obţinut Medalia de aur şi Diploma de onoare a juriului Salonului Internaţional de Invenţii de la Viena, din anul 1970.

2. Avînd în vedere rezultatele bune obţinute de tipurile anterioare de maşini, construite după procedeul cilindro-eliptic, autorii au propus şi realizat în anul 1968, în colaborare cu Uzina „Nicolina"—Iaşi, un nou tip de maşină destinat ascuţirii burghielor cu ∅18..63 mm, prevăzută cu răcire prin lichid pulverizat şi cu un dispozitiv universal de construcţie originală pentru poziţionarea burghielor elicoieale.

Faţă de precedentele variante, noul tip de maşină de ascuţit a fost conceput cu un grad de universalitate foarte larg, atît prin structura maşinii (reglaj cinematic), cît şi prin reglajul poziţional al burghiului în raport cu piatra.

Pentru obţinerea unor performanţe superioare, maşina realizată se deosebeşte de precedentele printr-o serie de elemente de automatizare introduse în circuitul de comandă al lanţului cinematic care realizează avansul pe adîncime, precum şi în al celui care realizează mişcările auxiliare de apropiere şi retragere a capului maşinii.

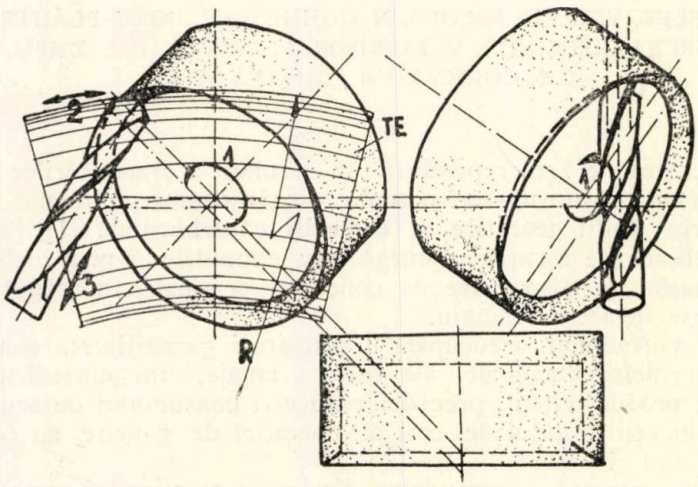


Fig. 1

Maşina concepută asigură o bătaie transversală a tăişului transversal sub 0,1 mm, valoare care satisface cerinţele actuale ale unei ascuţiri corecte pentru gama de burghie pentru care este destinată. Ceilalţi parametri ai preciziei ca bătaia longitudinală a tăişului transversal, bătaia unghiulară a tăişurilor principale şi diferenţa de lungime a tăişurilor principale depind nu numai de metoda de ascuţire, ci şi de precizia de execuţie a burghiului şi, în special, de simetria canalelor.

În comparaţie cu tipurile anterioare, noul tip de maşină prezintă şi particularitatea că mişcarea de avans longitudinal *2* (fig. 1) se execută după un arc de rază *R*, cilindrul eliptic după care se face ascuţirea fiind apro-

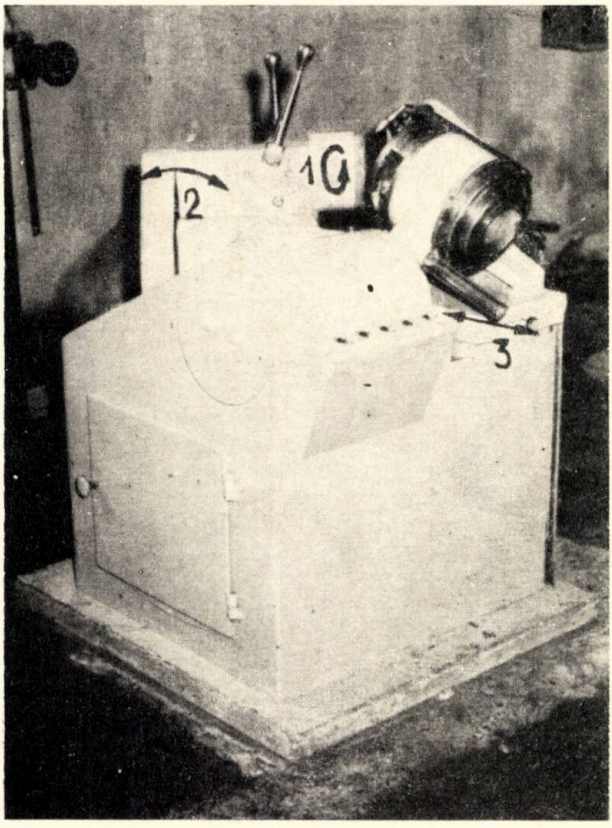


Fig. 2

ximat printr-un element de tor eliptic, *TE*, ceea ce asigură o simplificare constructiv-funcţională a maşinii.

Noul tip de maşină, prezentat în fig. 2, realizează ascuţirea feţei de aşezare a burghiului prin îmbinarea a trei mişcări de lucru (fig. 1 şi 2):

a) mişcarea principală *1*, de rotaţie a pietrei;
b) mişcarea de avans longitudinal, *2*;
c) mişcarea de avans pe adîncime, *3*.

Cele trei mişcări de lucru realizează la elementele finale următoarele valori:

1° Viteza mişcării principale, $v=30$/sec, este obţinută cu o piatră oală STAS 605, cu $\varnothing$ 150 mm — la o turaţie de cca 4000 rot/min; mişcarea de rotaţie a pietrei oală nu s-a prevăzut cu posibilităţi de reglare, deoarece se foloseşte un singur diametru de piatră, care funcţionează la o turaţie constantă. Pentru mărirea gradului de universalitate a maşinii şi pentru simplificarea reglajului poziţional burghiu-piatră, s-a renunţat la folosirea de pietre abrazive de diametre diferite.

Lanţul cinematic pentru obţinerea acestei mişcări are structura: electromotor cu 2850 rot/min, transmisie prin curea, cap port-piatră.

2° Viteza mişcării de avans longitudinal *2* a pietrei, şi a întregului ansamblu al mişcării principale, obţinută printr-o basculare pe un arc de cerc de rază mare, este de 6...10 m/min, realizînd condiţiile unui regim de autoascuţire a pietrei, fără supraîncălzirea burghiului [1]. Mişcarea de avans longitudinal *2* se realizează printr-un lanţ cinematic cu structura: electromotor, transmisie prin curea trapezoidală, mecanism de transformare a mişcării de rotaţie în mişcare de basculare alternativă, de tip levier oscilant prelungit-culisă. Ca atare, mişcarea *2*, rectilinie la procedeul de bază, s-a înlocuit cu o mişcare după un arc de cerc de rază mare. Lungimea cursei mişcării *2* poate fi reglată prin variaţia excentricităţii articulaţiei pietrei de culisă. Avînd în vedere diametrele maxime şi minime ale burghielor ascuţite, gama de reglare a cursei mişcării *2* a fost stabilită la valoarea de 1,6. Cursele limită, ca şi viteza de aşchiere prescrisă, au impus pentru mişcarea de basculare un număr de 63 curse duble/minut.

3° Avansul pe adîncime *3* a fost realizat între valorile optime cuprinse între 0,05...0,08 mm/cursă, ceea ce corespunde valorilor maxime admisibile indicate în literatură pentru regimurile de ascuţire ale oţelului rapid [5], [6]. Mişcarea de avans *3* se realizează continuu, în vederea uniformizării solicitării mecanice a pietrei în timpul celor două curse active ale mişcării de avans *2*. Mişcarea de avans *3* s-a obţinut cu un lanţ cinematic de acţionare avînd structura: electromotor, transmisie prin curea trapezoidală, reductor melcat, mecanism cu camă axială-tambur.

Maşina este prevăzută cu două mişcări axiliare şi anume:

a) mişcarea de apropiere şi retragere rapidă a burghiului; se realizează cu ajutorul lanţului cinematic al mişcării de lucru *3*, cu posibilitate de inversare, folosind cama tambur a mişcării *3*;

b) mișcarea de împărțire la 180°, constantă, se realizează cu ajutorul unui mecanism de divizare (rotire, indexare), care face parte integrantă din dispozitivul de poziționare-strîngere a burghiului, prezentat în fig. 3.

3. Dispozitivul de poziționare-strîngere prezintă următoarele caracteristici constructive:

a) existența unui mecanism de bazare și strîngere autocentrat cu prisme, de construcție specială, care, împreună cu plăcuța de sprijin axială și cu arcul de poziționare unghiulară, realizează o bazare completă a burghiului; adaptarea unui sistem de poziționare cu prisme speciale se justifică prin necesitatea asigurării unui grad mare de universalitate — condiție reclamată de caracteristicile activității de ascuțire a burghielor în uzinele prelucrătoare (parametri dimensionali continuu variabili);

b) mecanismul de poziționare și strîngere, autocentrat, asigură o poziție bine determinată axei burghiului, indiferent de diametrul lui; autocentrarea se obține prin construcția prismelor și prin șurubul cu filet stînga-dreapta care acționează asupra prismelor;

c) mecanismul autocentrat cu prisme poate fi reglat pe două direcții perpendiculare pe axa burghiului, prin care se elimină erorile de prelucrare inerente unei asemenea construcții; prin reglarea corespunzătoare a dispozitivului se pot obține bătăi radiale sub 0,1 mm;

d) pentru divizare la 180°, dispozitivul posedă un mecanism indexor, cu fixator oscilant, cu cap în formă de pană;

e) dispozitivul a fost conceput cu acționare manuală, avînd în vedere caracteristicile de universalitate și condițiile de exploatare impuse.

Mișcările de poziționare ale burghiului față de dispozitiv se referă la mișcarea de avansare a burghiului pe direcția axei sale, mișcare limitată de o placă de reazem, și la mișcarea de rotație a burghiului în jurul axei sale, pînă la arcul opritor (fig. 3); poziționarea unghiulară este necesară pentru realizarea unei anumite perechi de valori ale unghiurilor α și ψ.

Poziționarea dispozitivului față de piatra abrazivă este realizată prin:

a) deplasarea burghiului față de piatră pe direcția mișcării *3*, printr-un mecanism manivelă-șurub-piuliță care, acționînd asupra camei tambur a mișcării *3*, asigură depășirea muchiilor interioare și exterioare ale suprafeței active a pietrei de către muchiile așchietoare ale burghiului;

b) mișcarea de oscilare a dispozitivului de poziționare-strîngere în jurul unei axe ce trece prin vîrful burghiului; această mișcare este necesară pentru variația unghiului la vîrf al burghiului.

Pe măsura uzării pietrei abrazive ea avansează pe direcția axială, datorită unui sistem de lagăre glisante, cu posibilitate de blocare.

Batiul mașinii a fost construit din plăci sudate, înălțimea sa de 905 mm fiind dictată de comoditatea exploatării mașinii.

Răcirea burghiului în timpul operației de ascuțire se realizează cu lichid pulverizat în jet de aer comprimat folosind o instalație de pulverizare de tip cu ejecție, prezentată schematic în fig. 4 *a*.

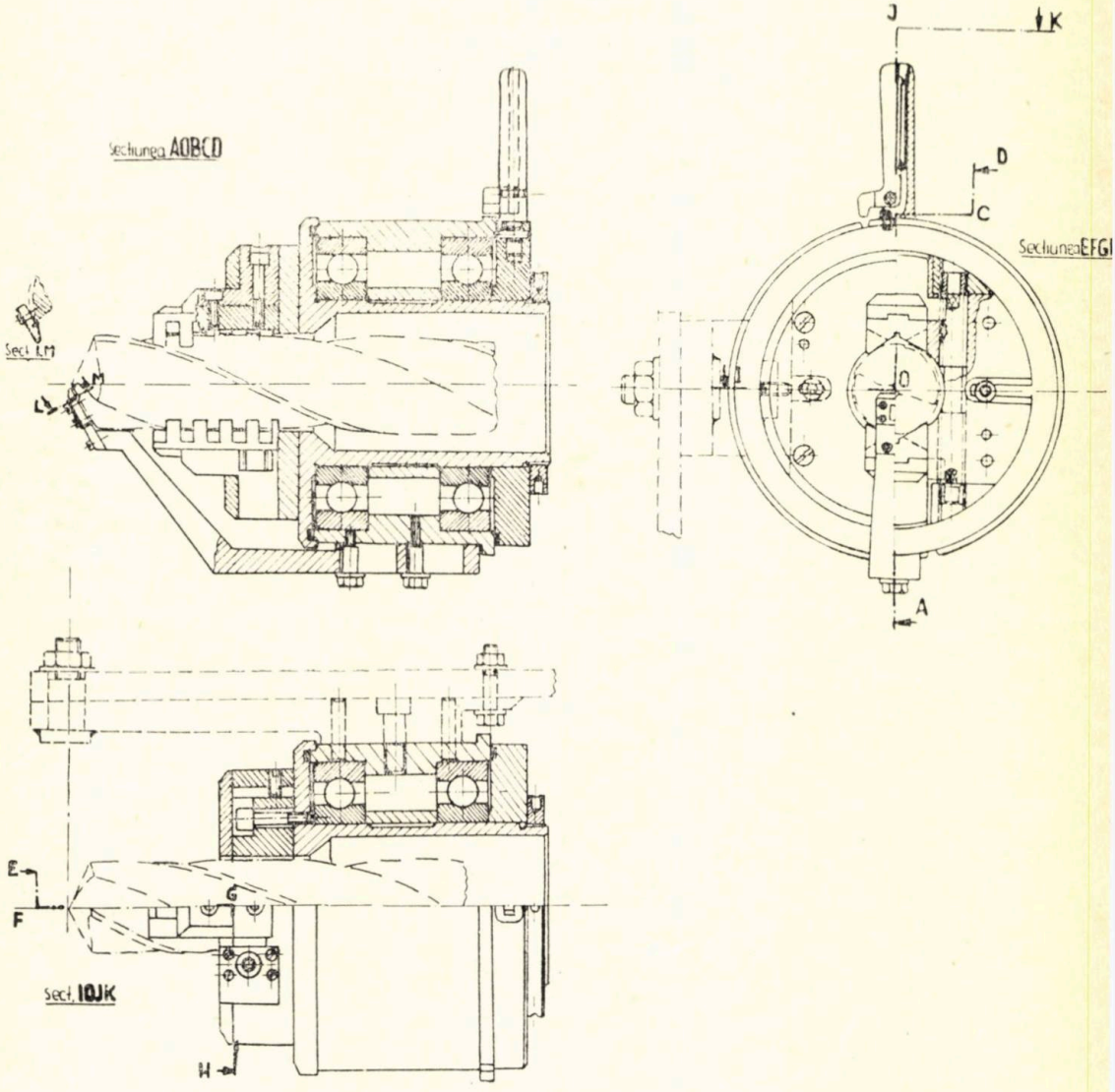
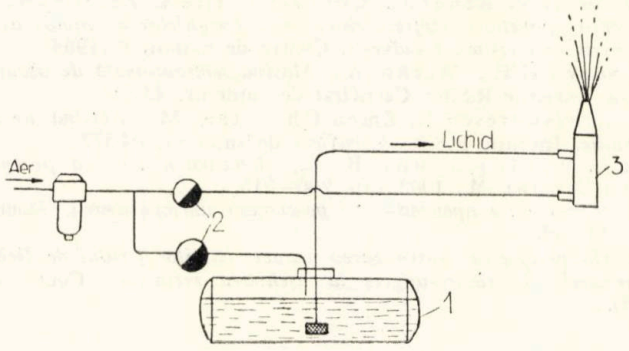
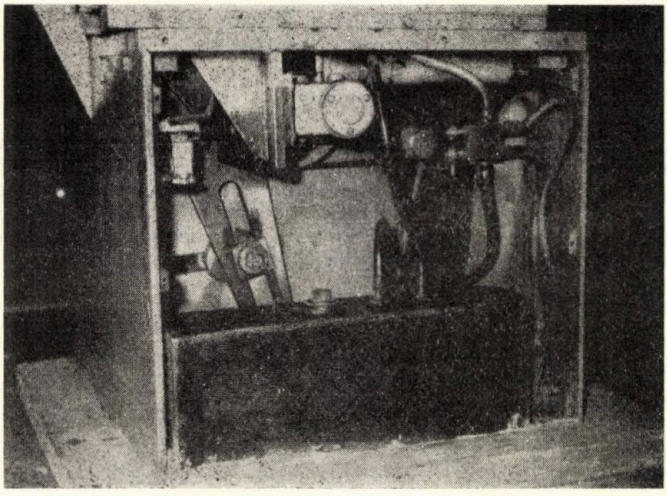

Secţiunea AOBCD
Sect. LM
L
M
J
K
D
C
Secţiunea EFGI
O
A
E
F
G
Sect. IOJK
H

Fig. 3

În fig. 4*b* este prezentată vederea de ansamblu a instalaţiei de răcire, care cuprinde acumulatorul pneumohidraulic *1* cu lichid de răcire, droselele *2* şi ajutajul amestecător *3*.



a



b

Fig. 4

Avînd în vedere particularităţile procesului de răcire, pe baza cunoaşterii spectrului pulverizării ca efect al ansamblului parametrilor caracteristici ai jetului [7] şi în scopul unei răciri eficiente, cu evitarea îmbîxirii, parametrii jetului au fost stabiliţi la valorile optime de 300...350 gr/oră, p_{aer}=4 kgf/cm^2, lichid de răcire în emulsie cu concentraţia 1,5 %.

Primită la 4 iulie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Belousov V., *Studiul şi elaborarea metodei de ascuţire cilindro-eliptică a burghielor elicoidale.* Teză de doctorat, Inst. polit. Iaşi, 1966.
2. Caşler Gh., Belousov V., Rener Al., Condrea I., Ilie I., Zerelles W., Schmidt H., *Influenţa geometriei părţii aşchietoare a burghielor elicoidale asupra dinamicii burghierii unor oţeluri româneşti.* Constr. de maşini, *8* (1963).
3. Belousov V., Seewald H., Marko A., *Maşină semiautomată de ascuţit burghie elicoidale* Invenţie R.S.R., Certificat de autor nr. 43 848.
4. Belousov V., Alexandrescu J., Zmeu Gh., Stan M., *Maşină de ascuţit burghie elicoidale.* Invenţie R.S.R., Certificat de autor nr. 44 577.
5. Каратыгин А. М., Коршунов В. С., *Заточка и доводка режущего инструмента.* Машгиз, М., 1963, стр. 206—215.
6. Палей М. М., *Технология производства режущего инструмента.* Машгиз, М., 1963, стр. 114—123.
7. Plăhteanu B., *Cu privire la optimizarea caracteristicilor jetului de lichid pulverizat în procesele de răcire-ungere la aşchierea metalelor.* Const. de maşini, *11* (1968).

UN NOUVEAU TYPE DE MACHINE SEMI-AUTOMATIQUE À AFFÛTER LES FORETS HÉLICOIDAUX SELON LE PROCÉDÉ CYLIDRO-ELLIPTIQUE

(Résumé)

On présente les caractéristiques constructives et fonctionnelles d'une nouvelle machine à affûter les forets hélicoidaux exécutée selon le procédé d'affutage cylindro-elliptique.

Le nouveau type de machine se remarque par l'originalité du procédé, simplicité constructive et fonctionnelle, cycle semi-automatique d'affûtage, un large domaine de fonctionnement (dimensions des forets comprises entre 18...63 mm), dispositif original de serrage, de même que par le système de refroidissement à jet par pulvérisation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 1—2, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.051.3

DETERMINAREA CONSTANTELOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE LA BURGHIEREA UNOR MATERIALE NEMETALICE FOLOSITE ÎN R. S. ROMÂNIA

DE

AUREL RĂILEANU, N. GOJINEŢCHI şi EMIL UNCHEŞEL

În această lucrare se dau rezultatele experienţelor consacrate determinării valorilor constantelor şi exponenţilor din relaţiile forţei axiale şi a momentului de torsiune la burghierea unor materiale nemetalice şi anume: Galalit, Ebonită, Vulcanită (fibră), Polimetacrilat de metil (Plexiglas), Bachelită, Textolit şi Relon. Majoritatea materialelor menţionate au fost obţinute de la Întreprinderea „Flamura Roşie" — Sibiu, care le foloseşte la fabricarea unor produse de larg consum.

Experienţele s-au executat pe o maşină de găurit tip G 40 („Înfrăţirea" — Oradea), lucrîndu-se cu următoarele avansuri: $s_1 = 0{,}11$ mm/rot, $s_2 = 0{,}16$ mm/rot, $s_3 = 0{,}22$ mm/rot şi $s_4 = 0{,}32$ mm/rot. Burghiele produse de la Fabrica de scule—Rîşnov, au fost burghie din oţel rapid cu unghiul de înclinare a canalului elicoidal $\omega = 30°$, raportul între grosimea miezului şi diametru de aproximativ 0,15 şi canalele lustruite. Ele s-au ascuţit după metoda conică pe un dispozitiv Kellenberger la geometria următoare: $\alpha_u = 12°$, $\psi = 55°$, $2\chi = 120°$. În timpul lucrului materialul de încercat era fixat pe un dinamometru tip Paramonov.

Pentru stabilirea valorilor numerice ale constantelor C_P şi C_M şi ale exponenţilor x_P, y_P, x_M şi y_M, din relaţiile forţei axiale şi a momentului de răsucire

$$P = C_P d^{x_P} s^{y_P}, \tag{1}$$

$$M = C_M d^{x_M} s^{y_M}, \tag{2}$$

s-au trasat două rînduri de drepte pe diagrame dublu logaritmice la d = const. şi s = const., atît pentru forţa axială, cît şi pentru momentul de răsucire (fig. 1...14).

Cu datele experimentale pentru cele patru valori ale avansului și diferitele valori d ale burghielor, s-au calculat valorile exponenților x_P, y_P, x_M, y_M și ale constantelor C_P și C_M, după cum se indică mai departe.

De pe fiecare dreaptă se alege o pereche de va'ori pentru fiecare dintre exponenții x_P, y_P, x_M, y_M. Astfel, pentru a determina valorile x_P, de pe fiecare dreaptă ce reprezintă variația forței P în funcție de diametrul burghiului d la $s = \text{const.}$ se extrag valorile P_1 și P_2, rezultînd $P_1 = C_P d_1^{x_P} s^{y_P}$, $P_2 = C_P d_2^{x_P} s^{y_P}$, din care prin împărțire și logaritmare se obține expresia:

$$x_P = \frac{\log P_2 - \log P_1}{\log d_2 - \log d_1}. \tag{3}$$

În mod similar, considerînd dreptele ce reprezintă variația forței P în funcție de avansul s la $d = \text{const.}$ se obține expresia:

$$y_P = \frac{\log P_2' - \log P_1'}{\log s_2 - \log s_1}. \tag{4}$$

S-a procedat la fel pentru determinarea valorilor exponenților x_M și y_M din relația (2) obținîndu-se

$$x_M = \frac{\log M_2 - \log M_1}{\log d_2 - \log d_1} \quad \text{și} \quad y_M = \frac{\log M_2' - \log M_1'}{\log s_2 - \log s_1}. \tag{5}$$

Pentru fiecare material s-au calculat valorile medii x_{Pm}, y_{Pm}, x_{Mm} și y_{Mm}, date în tabelul 1.

Tabelul 1

Materialul	x_{Pm}	y_{Pm}	C_{Pm}	x_{Mm}	y_{Mm}	C_{Mm}
Galalit	1,08	0,63	2,88	1,64	0,98	0,72
Ebonită	1,23	0,68	1,46	2,12	0,83	0,14
Vulcanită (fibră)	1,04	0,49	2,63	2,14	0,67	0'12
Polimetacrilat de metil (plexiglas)	1,08	0,38	2,20	1,89	0,72	0,32
Bachelită	1,38	0,36	1,05	1,64	0,71	0,52
Textolit	1,22	0,61	2,88	1,47	0,81	0,33
Relon	1,10	0,21	2,52	1,76	0,68	0,56

Constanta C_P se calculează cu relațiile:

$$C_P = \frac{P}{d^{x_{Pm}} s^{y_P}} \quad \text{și} \quad C_P = \frac{P}{d^{x_P} s^{y_{Pm}}}, \tag{6}$$

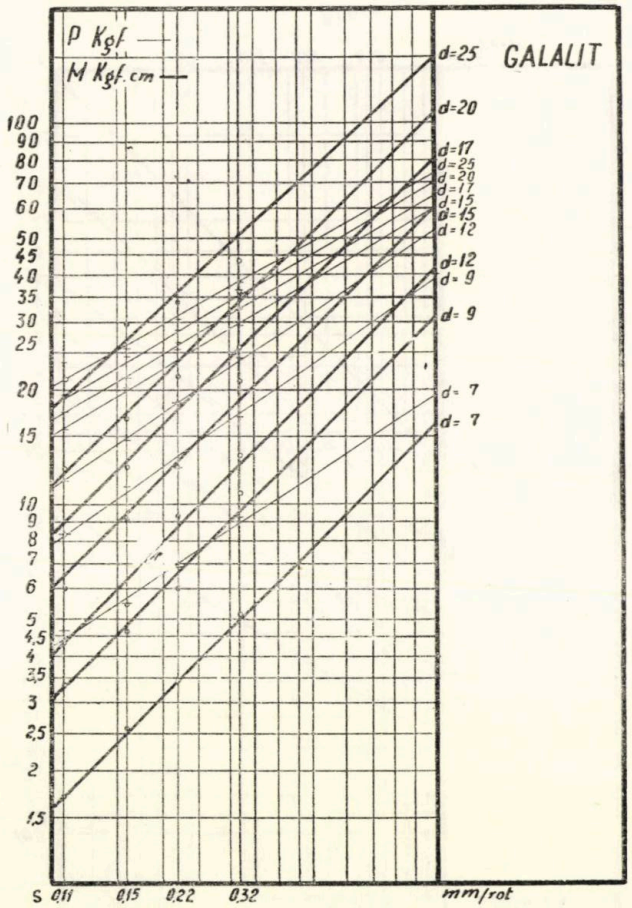

P Kgf
M Kgf.cm
GALALIT
d=25
d=20
d=17
d=25
d=20
d=17
d=15
d=15
d=12
d=12
d= 9
d= 9
d= 7
d= 7
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
S 0,11 0,15 0,22 0,32
mm/rot

Fig. 1

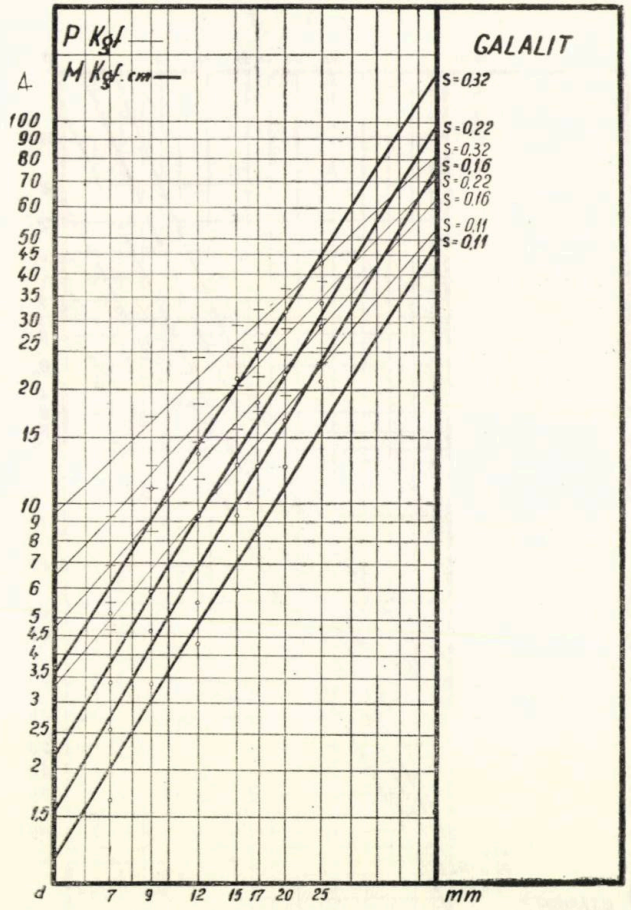

P Kgf
M Kgf.cm
GALALIT
S=0,32
S=0,22
S=0,32
S=0,16
S=0,22
S=0,16
S=0,11
S=0,11
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
d 7 9 12 15 17 20 25
mm

Fig. 2

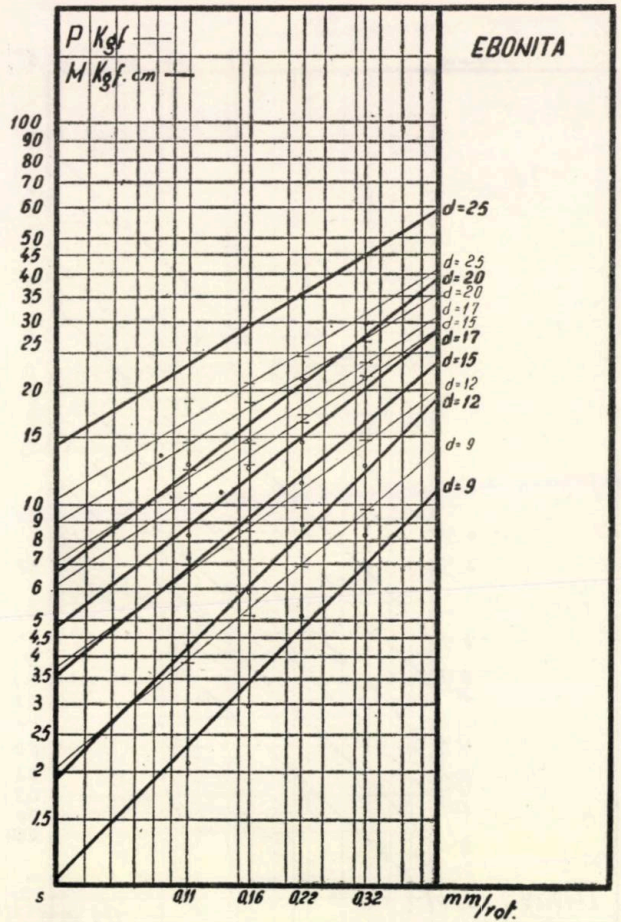

P Kgf
M Kgf. cm
EBONITA
d=25
d=20
d=17
d=15
d=12
d=9
s
0,11
0,16
0,22
0,32
mm/rot.

Fig. 3

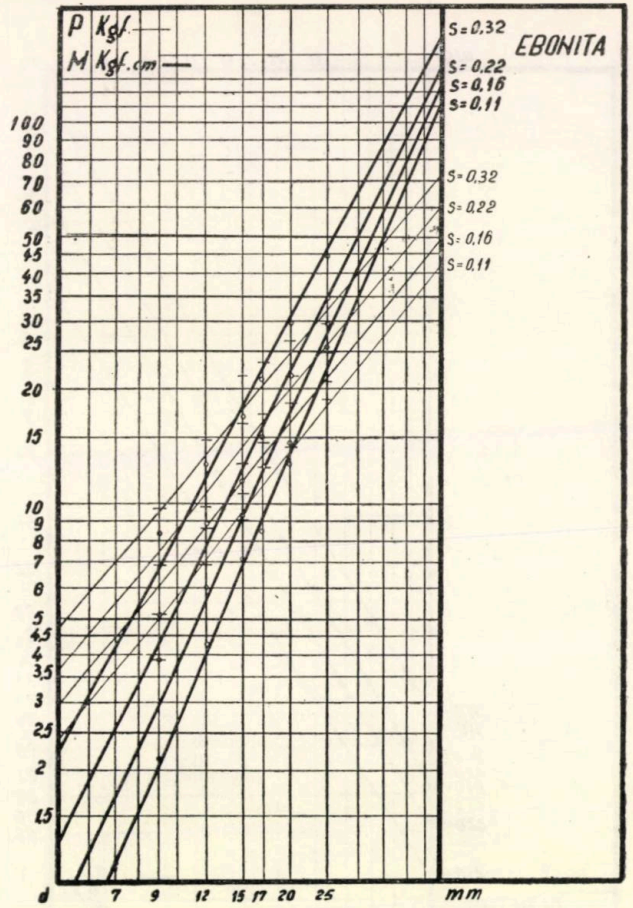

P Kgf
M Kgf. cm
EBONITA
S=0,32
S=0,22
S=0,16
S=0,11
d
7
9
12
15
17
20
25
mm

Fig. 4

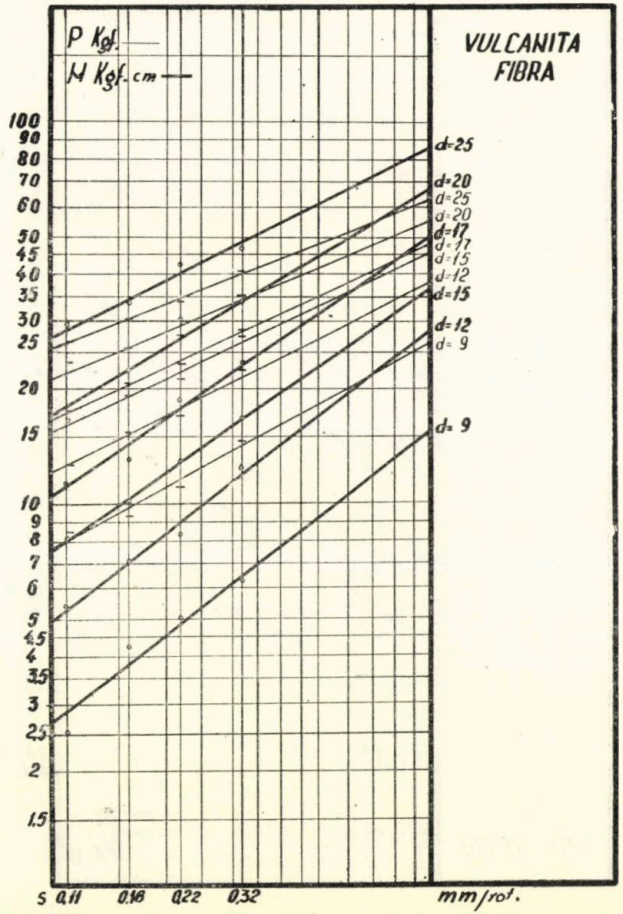

P Kgf.
M Kgf.cm
VULCANITA
FIBRA
d=25
d=20
d=25
d=20
d=17
d=17
d=15
d=12
d=15
d=12
d= 9
d= 9
S 0.11 0.16 0.22 0.32
mm/rot.

Fig. 5

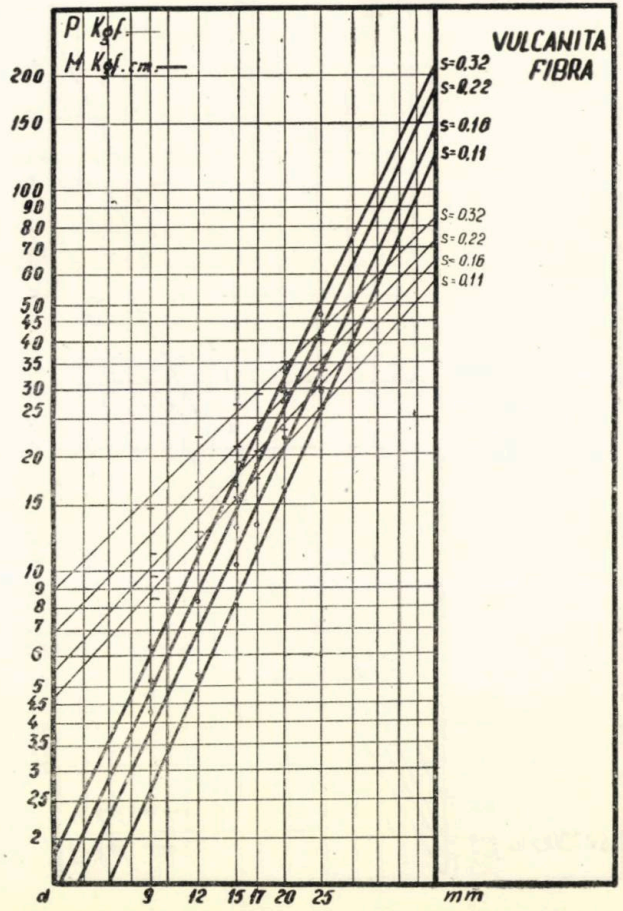

P Kgf.
M Kgf.cm
VULCANITA
FIBRA
S=0.32
S=0.22
S=0.16
S=0.11
S=0.32
S=0.22
S=0.16
S=0.11
d
9 12 15 17 20 25
mm

Fig. 6

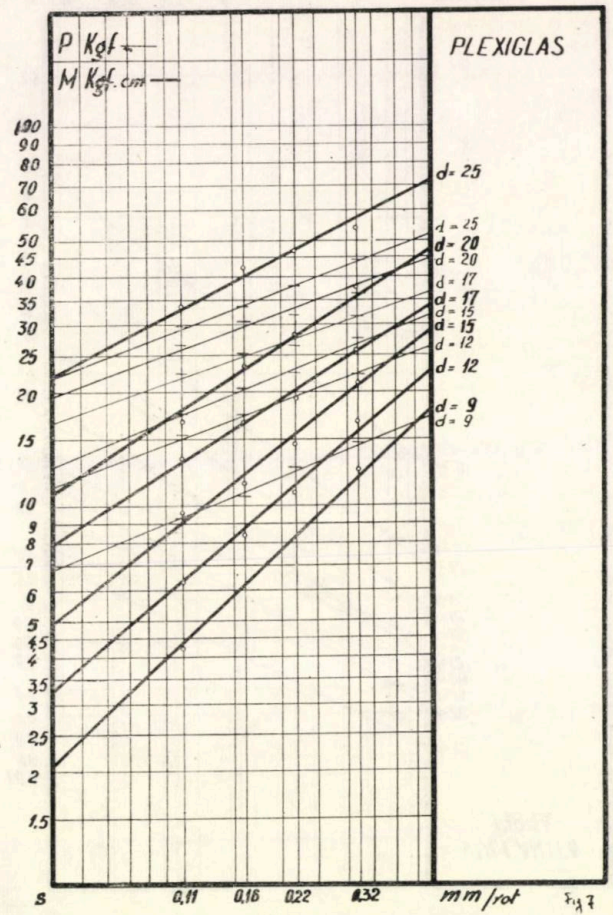

P Kgf.
M Kgf.cm
PLEXIGLAS
d = 25
d = 20
d = 17
d = 15
d = 12
d = 9
s
0,11
0,16
0,22
0,32
mm/rot

Fig. 7

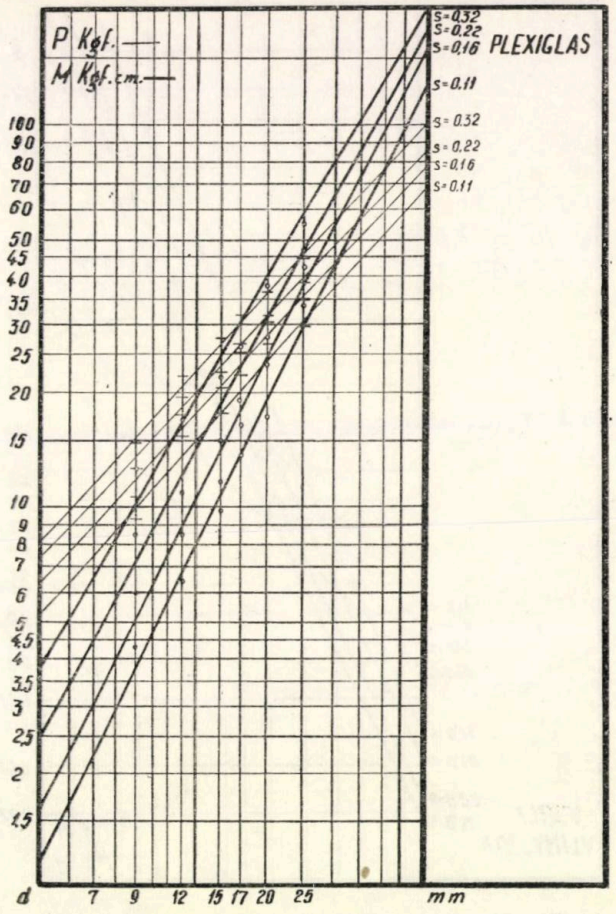

P Kgf.
M Kgf.cm.
PLEXIGLAS
s = 0,32
s = 0,22
s = 0,16
s = 0,11
d
7
9
12
15
17
20
25
mm

Fig. 8

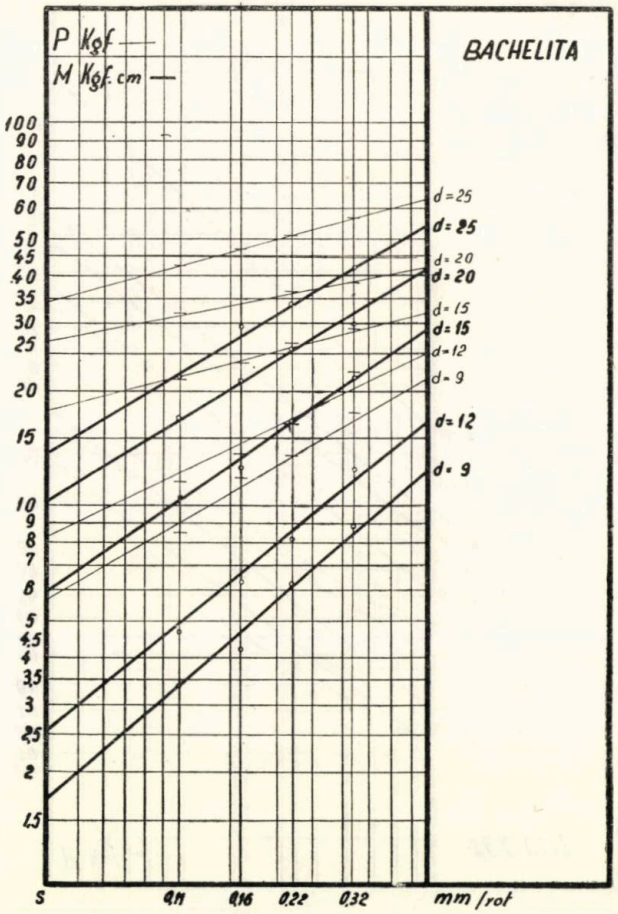

P Kgf
M Kgf.cm
BACHELITA
d=25
d=25
d=20
d=20
d=15
d=15
d=12
d=9
d=12
d=9
S
0.11
0.16
0.22
0.32
mm/rot

Fig. 9

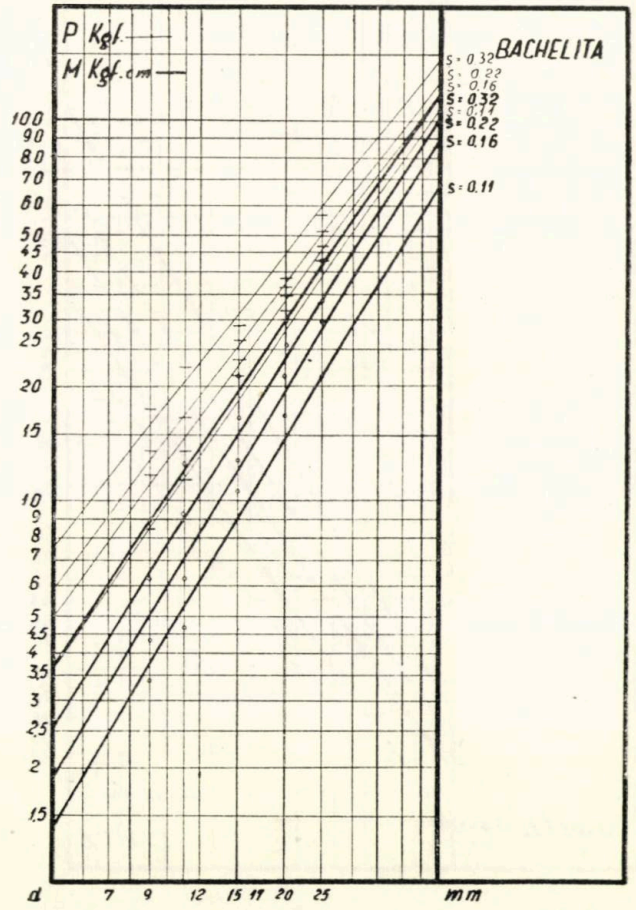

P Kgf
M Kgf.cm
BACHELITA
S=0.32
S=0.22
S=0.16
S=0.11
d
7
9
12
15 17
20
25
mm

Fig. 10

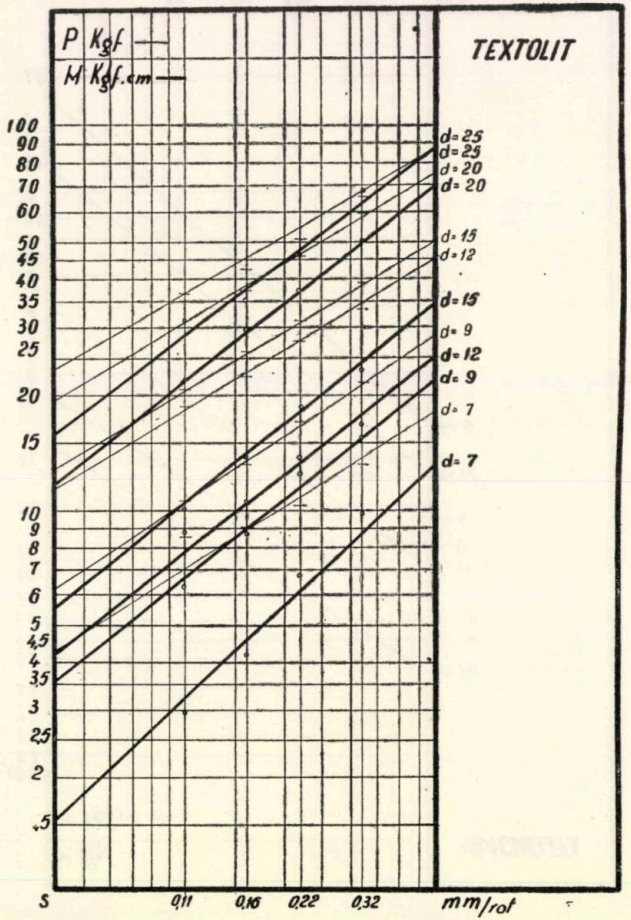

P Kgf
M Kgf.cm
TEXTOLIT
d= 25
d= 25
d= 20
d= 20
d= 15
d= 12
d= 15
d= 9
d= 12
d= 9
d= 7
d= 7
S
0,11
0,16
0,22
0,32
mm/rot

Fig. 11

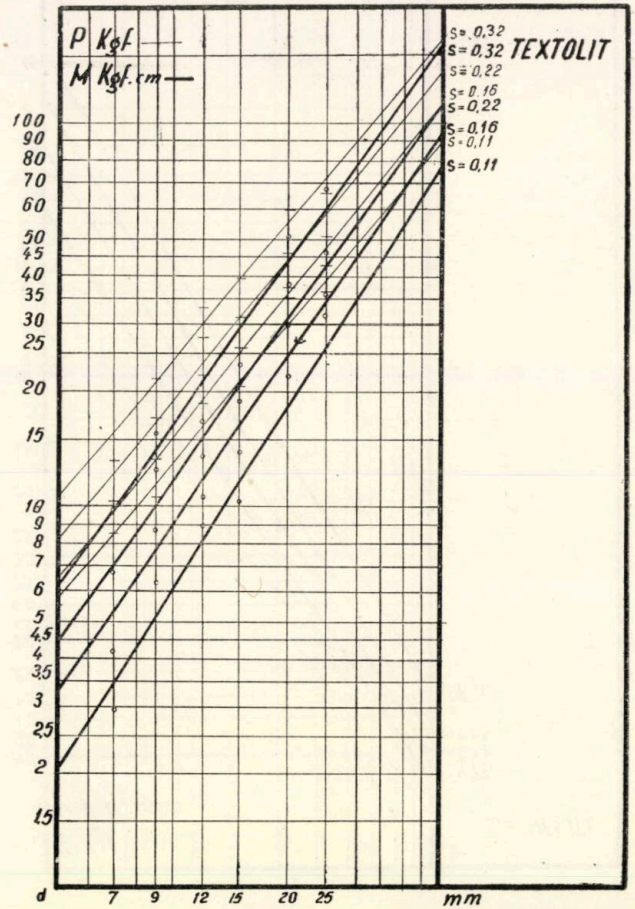

P Kgf
M Kgf.cm
TEXTOLIT
S= 0,32
S= 0,32
S= 0,22
S= 0,16
S= 0,22
S= 0,16
S= 0,11
S= 0,11
d
7
9
12
15
20
25
mm

Fig. 12

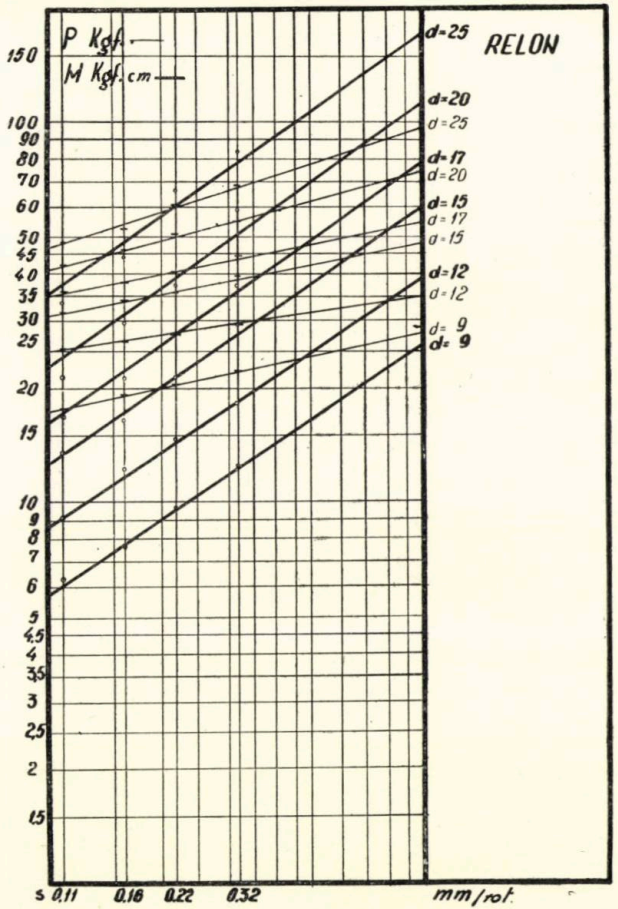

P Kgf.
M Kgf. cm
RELON
d=25
d=20
d=25
d=17
d=20
d=15
d=17
d=15
d=12
d=12
d= 9
d= 9
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
s 0.11 0.16 0.22 0.32
mm/rot

Fig. 13

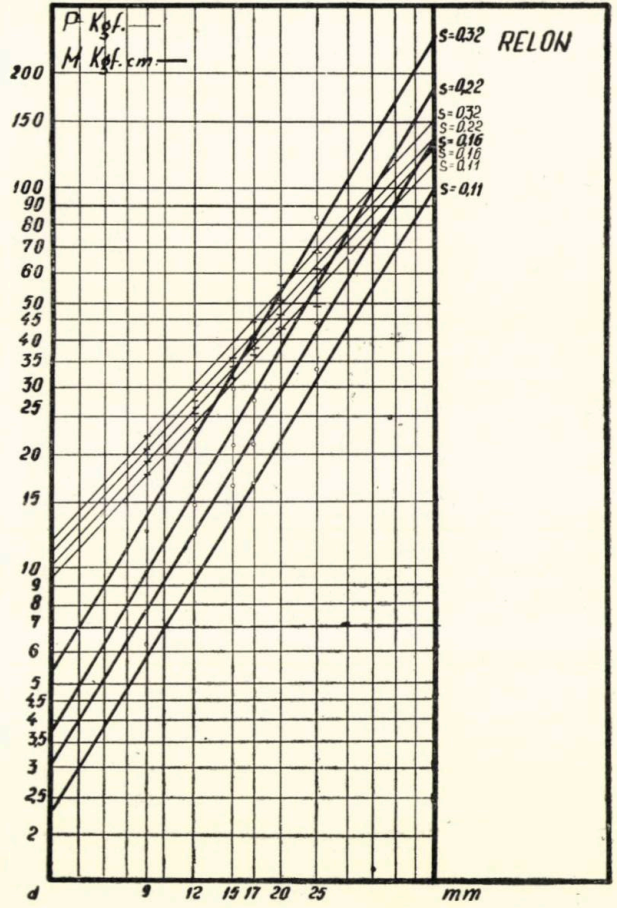

P Kgf.
M Kgf. cm
RELON
s=0.32
s=0.22
s=0.32
s=0.22
s=0.16
s=0.16
s=0.11
s=0.11
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
d
9 12 15 17 20 25
mm

Fig. 14

în care se introduc valorile forţei P la $s = 1$ mm, respectiv la $s = 10$ mm. Făcînd media acestor valori se obţine pentru fiecare material cîte o valoare medie C_{Pm}, dată în tabelul 1.

Analog, plecînd de la relaţiile:

$$(7) \qquad C_M = \frac{M}{d^{x_{Mm}} s^{y_M}} \quad \text{şi} \quad C_M = \frac{M}{d^{x_M} s^{y_{Mm}}}$$

s-au determinat valorile constantei C_{Mm} pentru fiecare material (tabelul 1).

Primită la 14 iulie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh., Rener Al., Bul. Inst. polit. Iaşi, **VIII (XII)**, *3–4*, 345 (1962).

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE ET DES MOMENTS CONCERNANT CERTAINS MATÉRIAUX NON MÉTALLIQUES, SOUMIS AU PERÇAGE

(Résumé)

On établit les valeurs des paramètres C_P, x_P, y_P et C_M, x_M, y_M, définis par les relations (1) et (2) pour les matériaux non métalliques suivants: galalithe, ébonite, fibre vulcanisée, plexiglas, bakélite, textolite, novodur et relon.

Nr. coli tipar : 9

Tiparul executat la Întreprinderea poligrafică Iași, str. V. Alecsandri 12
sub comanda 38
Republica Socialistă România

F 1503

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVII (XXI)

Fasc. 3–4

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1971

BIBLIOTECA CENTRALĂ

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVII (XXI)

Fasc. 3–4

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1971

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. FARCAȘ
Prof. ing. G. D'ALBON
Conf. ing. CR. LINDE

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XVII (XXI), fasc. 3—4 1971

Secţia IV

MECANICĂ TEHNICĂ

SUMAR

Pag.

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI (Canada) şi FLORIN V. POTERAŞU, Programarea dinamică a problemei determinării frecvenţelor şi modurilor de vibraţie ale unei bare elastice scufundată într-un mediu continuu rezistent (franc., rez. rom.) 1

GH. CIOBANU şi GABRIELA NEAGU, Asupra mişcării unui sistem de rigide legate prin articulaţii (rom., rez. franc.) . . 7

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU şi GABRIELA NEAGU, Asupra legăturilor neolonome impuse sistemelor mecanice avînd solide rigide ca elemente constitutive. (I) Legături neolonome realizate prin reazeme cu alunecare tangenţială, fără rostogolire (franc., rez. rom.) 11

ALFRED BRAIER, Răspunsul frecvenţial al sistemelor de ordinul întîi la intrări modulate în amplitudine. (III) Intrări cu modulaţie armonică generală (engl., rez. rom.) . . . 19

CHRISTIANE LEGRAS (Franţa), Analiza fenomenelor de relaxare în materiale anelastice (franc., rez. rom.) 29

GH. NIŢESCU, VIRGIL OLARIU, M. TOFAN şi A. IONESCU, Asupra analizei nearmonice a perturbării echilibrului stabil al unui sistem mecanic (franc., rez. rom.) 37

LIVIU BRÎNDEU, Asupra determinării condiţiilor de stabilitate ale mişcărilor periodice în cazul sistemelor vibro-percutante cu un grad de libertate (germ., rez. rom.) 43

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC şi AURORA CRĂCIUNAŞ, Asupra ecuaţiilor dinamicii solidului cu masă variabilă (franc., rez. rom.) 51

Pag.

C. DUCA, Metodă pentru determinarea vitezelor și a acceleraţiilor la grupele assurice de ordinul doi (rom., rez. engl.) . . . 59

N. G. POPINCEANU și E. N. DIACONESCU, Contribuţii la calculul îmbinărilor cu șuruburi cu strîngere iniţială pe bază de cercetări teoretice și experimentale. (I) Studiu teoretic privind comportarea îmbinărilor cu șuruburi cu strîngere iniţială, cu garnituri reologice (franc., rez. rom.) . . . 69

L. T. HOSTIUC, Contribuţii privind durabilitatea și capacitatea dinamică de bază a rulmenţilor radiali cu mișcare de oscilaţie. (I) Relaţii generale de calcul pentru durabilitatea și capacitatea dinamică de bază (franc., rez. rom.) 87

C. PICOȘ, ADRIAN CIRILLO, GH. COMAN și V. BRAHA, Influenţa durificării superficiale cu bile asupra rezistenţei la coroziune a oţelurilor (germ., rez. rom.) 95

GÉRARD D'ALBON, DAVID PERETZ, VALERIU CERNESCU, IUSTIN BENDESCU și VIRGIL CLOŢAN, Trecerea căldurii în cazul corpurilor cu microaripioare imersate într-un strat fluidizat (rom., rez. franc.) 101

DAVID PERETZ, Evoluţia procesului de autoaprindere în motoare antrenate, la rapoarte de compresie diferite (rom., rez. germ.) 107

EMIL JUGUREANU, Cercetări privind constatarea efectului Jacq în convecţia cu apă distilată (rom., rez. franc.) 111

GH. LOZONSCHI, Asupra unei noi posibilităţi de creștere a randamentului centralelor termoelectrice (rom., rez. franc.) . . 117

EMIL GAIGINSCHI, MORITZ REICHER și MIRCEA ZUGRĂVEL, Expresia generală a gradului de perfecţie a ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă (rom., rez. rusă) . 123

AURELIAN SIMIONESCU, AL. BÎRJOIANU și AL. ȘTIURCĂ, Construcţia unui fummetru fotoelectric și rezultatele încercărilor pe motorul D—103 (engl., rez. rom.) 129

GH. CAȘLER și BORIS PLĂHTEANU, Contribuţii la aplicarea răcirii-ungerii cu lichid pulverizat la joasă presiune, la strunjirea profilată a elementelor de rulmenţi (engl., rez. rom.) 137

VITALIE BELOUS și MIRCEA COZMÎNCĂ, Contribuţii la studiul unghiului de degajare real din procesele de așchiere (rom., rez. franc.) 145

GR. TAȘCĂ, Unele consideraţii asupra cinematicii și dinamicii acţionării electrice a tocătoarei de furaje grosiere T.M.S.-6 M (rom., rez. engl.) 155

N. GOJINEŢCHI și EMIL UNCHEȘEL, Consideraţii teoretice și verificarea experimentală a capacităţii de strîngere a dispozitivelor cu mecanisme cu pene și plunjere multiple (rom., rez. franc.) 165

AUREL RĂILEANU, EMIL UNCHEȘEL și N. GOJINEŢCHI, Determinarea constantelor și exponenţilor din relaţiile momentului de torsiune și a forţei axiale la burghierea oţelurilor românești, grupa oţel pentru cuţite, STAS nr. 1699—50 (rom., rez. franc.) 175

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tom XVII (XXI), Fasc. 3—4 1971

Section IV

MECHANICAL ENGINEERING

CONTENTS

	Pp.
D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI (Canada) et FLORIN V. POTERAŞU, Programmation dynamique du problème de la détermination des fréquences et des modes de vibrations d'une barre élastique immergée dans un milieu continu résistant (French, Romanian summary)	1
GH. CIOBANU et GABRIELA NEAGU, Sur le mouvement d'un système de corps solides indéformables liés par des articulations (Romanian, French summary)	7
N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU et GABRIELA NEAGU, Sur les liaisons nonholonomes imposées aux systèmes mécaniques ayant de solides rigides comme éléments constitutifs. (I) Liaisons nonholonomes réalisées par des appuis avec glissement tangentiel, sans roulement (French, Romanian summary)	11
ALFRED BRAIER, Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs. (III) General Harmonic Modulated Inputs (English, Romanian summary) . . .	19
CHRISTIANE LEGRAS (France), Analyse des phénomènes de relaxation dans les matériaux anélastiques (French, Romanian summary)	29
GH. NIŢESCU, VIRGIL OLARIU, M. TOFAN et A. IONESCU, Sur l'analyse nonharmonique de la perturbation de l'équilibre stable d'un système mécanique (French, Romanian summary)	37
LIVIU BRÎNDEU, Über die Bestimmung der Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen eines Stossschwingers mit einem Freiheitsgrad (German, Romanian summary) . .	43
SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC et AURORA CRĂCIUNAŞ, Sur les équations de la dynamique du solide dont la masse est variable (French, Romanian summary)	51
C. DUCA, A Method for Determination the Velocities and Accelerations of the Second Order Assur-Groups (Romanian, English summary)	55

Pp.

N. G. POPINCEANU et E. N. DIACONESCU, Contributions au calcul des assemblages à vis précontraintes à base de recherches théoriques et expérimentales. (I) Étude théorique concernant le comportement des assemblages à vis précontraintes avec garnitures rhéologiques (French, Romanian summary) 69

L. T. HOSTIUC, Contributions concernant la durabilité de vie et le taux dynamique de base des roulements radiaux à mouvement oscillant. (I) Relation générale de calcul de la durabilité de vie et du taux dynamique de base (French, Romanian summary) 87

C. PICOȘ, ADRIAN CIRILLO, GH. COMAN und V. BRAHA, Der Einfluss der oberflächlichen Kugelhärtung, auf den Korrosionswiderstand der Stähle (German, Romanian summary) 95

GÉRARD D'ALBON, DAVID PERETZ, VALERIU CERNESCU, IUSTIN BENDESCU et GH. LOZONSCHI, Le transfert de la chaleur des corps avec microaillettes immersées dans un lit fluidisé (Romanian, French summary) 101

DAVID PERETZ, Der Verlauf des Selbstzündungsprozesses bei einem fremdangetriebenen Motor mit verschiedenen Verdichtungsverhältnissen (Romanian, German summary) 107

EMIL JUGUREANU, Recherches concernant la constatation de l'effet Jacq dans la convection à l'eau distillé (Romanian, French summary) 111

GH. LOZONSCHI, Considérations sur une nouvelle possibilité d'accroissement du rendement des centrales thermiques (Romanian, French summary) 117

EMIL GAIGINSCHI, MORITZ REICHER und MIRCEA ZUGRĂVEL, Der allgemeine Ausdruck Vollkammenheitsgrades der theoretischen Kreisprozesse für Verbrennungskraftmaschinen (Romanian, Russian summary) 123

AURELIAN SIMIONESCU, AL. BÎRJOIANU and AL. ȘTIURCĂ, Construction of a Photoelectric Smokemeter and Results of Tests on a D—103 Engine (English, Romanian summary) 129

GH. CAȘLER and BORIS PLĂHTEANU, Contributions to the Applications of Mist-cooling with Liquid at Lower Pressure, to Profiled Lathing of Bearing Elements (English, Romanian summary) 137

VITALIE BELOUS et MIRCEA COZMÎNCĂ, Étude de l'angle d'attaque de l'outil dans le processus de coupe (Romanian, French summary) 145

GR. TAȘCĂ, Some Considerations about the Kinematics and Dynamics of the Electric Drive of the Rough Forage Chopper (Romanian, English summary) 155

N. GOJINEȚCHI et EMIL UNCHEȘEL, Considérations théoriques et vérification expérimentale de la capacité de serrage des dispositifs avec mécanismes à clavettes et plongeurs multiples (Romanian, French summary) 165

AUREL RĂILEANU, EMIL UNCHEȘEL et N. GOJINEȚCHI, Détermination des paramètres des forces de coupe et des moments concernant le perçage des aciers roumains standardisés, STAS no. 1699—50 (Romanian, French summary) . . . 175

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XVII (XXI), вып. 3—4 1971

Секция IV

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Д. МАНЖЕРОН, М.Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (Канада) и ФЛОРИН В. ПОТЕРАШУ, Динамическое программирование задачу определения частот и модулей колебаний упругого бруса или балки в непрерывной сопротивляющейся среде (франц., рез. рум.) 1

Г. ЧОБАНУ и ГАБРИЕЛА НЯГУ, О движении системы твердых жестких тел связанных шарнирами (рум., рез франц) 7

Н. ИРИМИЧУК, ЕЛИСАБЕТА РУСУ и ГАБРИЕЛА НЯГУ, О неголономных связях механических систем состоящих из тверных жестких тел. (I) Неголономные связи предетавленные опорами с касателным скольжением без качения (франц., рез. рум.) 11

АЛФРЕД БРАЙЕР, Частотный ответ систем первого порядка на модулированные по амплитуде входы. (I) Входы с общей гармонической модуляцией (англ., рез. рум.) 19

КРИСТИАНА ЛЕГРА (Франциа), Анализ релаксационных процессов анэластичных материалах (франц., рез. рум.) 29

Г. НИЦЕСКУ, ВИРДЖИЛ ОЛАРИУ, М. ТОФАН и А. ИОНЕСКУ, О негармоническом анализе пертурбации установившегося равновесия механической системы (франц., рез. рум.) 37

ЛИВИУ БРЫНДЕУ, Об определении условий устойчивости периодических движений в случае виброударных систем с одной степенью свободы (нем., рез. рум.) 43

СПИРИДОН ДЕЛЕАНУ, Н. ИРИМИЧУК и АВРОРА КРЭЧУНАШ, Об уравнениях динамики твердого тела переменной массы (франц., рез. рум.) 51

К. ДУКА, Метод для определения скоростей и ускорении групп ассура второго порядка (рум., рез. англ.) 59

Стр.

Н. Г. ПОПИНЧЯНУ и Е. Н. ДИАКОНЕСКУ, К расчёту предварительно затянутых болтовых соединений на основе теоретических и экспериментальных усследований. (I) Теоретическое исследование поведения предварительно затянутых болтовых соединений с реологических прокладкий (франц., рез. рум.) 69

Л. Т. ХОСТЮК, Долговечности и нагрузочной динамической способности радиалных подшипников с качающимся движением. (I) Общие расчетные уравнения долговечности и нагрузочнои динамической способности (франц., рез. рум.) 87

К. ПИКОШ, АДРИЯН ЧИРИЛО, Г. КОМАН и В. БРАХА, Влияние поверхностного наклепа шариками на корозионнои стойкости сталей (нем., рез. рум.) 95

ДЖЕРАРД Д'АЛЬБОН, ДАВИД ПЕРЕЦ, ВАЛЕРЮ ЧЕРНЕСКУ, ЮСТИН БЕНДЕСКУ и ВИРДЖИЛ КЛОЦАН, Переход тепла в случай телами с микрокрылями погруженными кипящем слое (рум., рез. франц.) . 101

ДАВИД ПЕРЕЦ, Эволюция процеса самовоспламенения в двигатели с раздельным приводом с различными степенями сжатия (рум., рез. нем.) 107

ЕМИЛ ЖУГУРЕАНУ, Исследования касающие констатирование Жака эффекта в конвекции в дистиллированной воде (рум. рез. русск.) . . 111

Г. ЛОЗОНСКИ, Об новой способности увеличения термического к. п. д. в тепловлектрических станциях (рум., рез. франц.) 117

ЕМИЛ ГАЙДЖИНСКИЙ, МОРИЦ РЕЙКЕР и МИРЧА ЗУГРЭВЕЛ, Общее выражение градуса совершенства теоретических циклов двигателей внутреннего сгорания (рум., рез. русск.) 123

АУРЕЛИАН СИМИОНЕСКУ, АЛ. БЫРЖОЯНУ и АЛ. ШТЮРКЭ, Конструкция фотоэлектрического дымомтрра и результаты его исследовании на двигателе Д-103 (англ., рез. рум.) 129

Г. КАШЛЕР и БОРИС ПЛЭХТЯНУ, К вопросу применение тонкораспылсное охлаждение при фасонное точение элементов родиковых подшипниках (англ., рез. рум.) 137

ВИТАЛИЕ БЕЛОУС и МИРЧА КОЗМЫНКЭ, Исследование рабочего переднего угла режущего инструмента в процесе металлов резание (рум., рез. франц.) 145

ГР. ТАЩКЭ, Некоторые соображения касающиеся кинематики и динамики электрических устроиств машины для крупнои сечки фуража (рум., рез. англ.) 155

Н. ГОДЖИНЕЦКИ и ЕМИЛ УНКЕШЕЛ, К вопросу теоретической и опытной проберки способности зажимания плунжерных патронов (рум., рез. франц.) 165

АУРЕЛ РЭЙЛЯНУ, ЕМИЛ УНКЕШЕЛ и Н. ГОДЖИНЕЦКИ, Определение параметров сил резания и крутящих моментов в процессе сверления румынских сталей, группа STAS 1699-50 (рум., рез. франц.) . . 175

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 539.31

PROGRAMMATION DYNAMIQUE DU PROBLÈME DE LA DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES ET DES MODES DE VIBRATION D'UNE BARRE ÉLASTIQUE IMMERGÉE DANS UN MILIEU CONTINU RÉSISTANT

PAR

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI et FLORIN V. POTERAŞU

À la mémoire ineffaçable de C. PAGHIDA

1. Les auteurs se sont proposés d'appliquer à la mécanique des corps déformables les méthodes d'optimisation élaborées dans ces dernières décades, à savoir la programmation dynamique, le principe du maximum, les méthodes de variation seconde et la méthode de programmation différentielle, tandis que le dernier d'eux a présenté une étude comparative de ces méthodes et a donné toute une série d'applications nouvelles dans sa thèse de doctorat [1].. [6].

Dans ce que suit on donne les équations nécessaires pour la détermination de la fréquence fondamentale de vibration d'une barre de section variable et de longueur donnée l immergée dans un milieu élastique qui exerce sur celle-ci une force transversale de grandeur $-kv(x, t)$, où k est une constante caractéristique du milieu considéré et $v(x, t)$ est le déplacement de la barre. On suppose que le déplacement de la barre est représenté de la sorte que l'on a

$$v(x, t) = f(t)\varphi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ appartient à une famille (F) de fonctions qui satisfont les conditions aux limites de la barre.

La fréquence fondamentale s'obtient dans ce cas à la suite de l'étude du minimum de l'expression

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\int_0^l \left[I \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 + \frac{k}{E} \varphi^2 \right] dx}{\int_0^l s\varphi^2 dx}, \tag{2}$$

où l'on a mis $c_1^2 = E/\rho$ (E étant le module du Young et ρ — la densité de la barre), s est l'aire de la section transversale et I est le moment d'inertie de cette section.

Le problème (2) est équivalent à la détermination du minimum relatif de la fonctionnelle

$$\int_0^l \left[I \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 + \psi\rho^2 \right] dx, \tag{3}$$

où l'on a posé $\psi = k/E$, soumis aux restrictions

$$\int_0^l s\varphi^2 dx = 1 \tag{4}$$

et

$$\varphi_0 = a, \quad \varphi_0' = c. \tag{5}$$

Il est évident que les conditions (5) constituent l'un des types de conditions à la frontière pour la barre considérée. D'après ce que l'on sait, ce même problème est équivalent au problème de la détermination du maximum relatif de l'expression

$$\int_0^l s\varphi^2 dx, \tag{6}$$

soumise aux conditions (5) et

$$\int_0^l \left[I \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 + \psi\varphi^2 \right] dx = 1. \tag{7}$$

2. En prenant le point de départ de la formulation (3), (5) et tout en tenant compte des procédés concernant la programmation dynamique

élaborés, si on fait l'abstraction de deux notes dues à Masset et publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* il y a un peu plus d'un quart de siècle, par M. R. Bellman et utilisés entre autres par les premiers auteurs dans la théorie et la pratique des équations polyvibrantes [1] [7]... [11], on considère la minimisation (dans sa forme discrète) de l'expression

$$F = \sum_{k=1}^{N} I_k \left(\varphi_k^i - \varphi_{k-1}^i \right)^2 + \psi_k \varphi_k'^2, \tag{8}$$

soumis aux conditions

$$\sum_{k=1}^{N} s_k \varphi_k^2 = 1, \quad \varphi_0 = a, \quad \varphi_0' = c, \quad \varphi_N = \alpha, \quad \varphi_N' = \beta. \tag{9}$$

Définissons maintenant les expressions

$$f_R(a, c) = \sum_{k=R}^{N} [I_k(\varphi_k' - \varphi_{k-1}')^2 + \psi_k \varphi_k^2] \tag{10}$$

et tout en tenant compte de la condition

$$\sum_{k=R}^{N} s_k \varphi_k^2 = 1 \tag{11}$$

et de l'état $\varphi_{R-1} = a$ et $\varphi_{R-1}' = c$, passons à l'utilisation de la stratégie optimale.

Le problème formulé de cette manière revient à la minimisation de l'expression

$$\sum_{k=R+1}^{N} [I_k(\varphi_k' - \varphi_{k-1}')^2 + \psi_k \varphi_k^2], \tag{12}$$

soumise à la restriction

$$\sum_{k=R+1}^{N} s_k \varphi_k^2 = 1 - s_R(\varphi_R' + a)^2. \tag{13}$$

L'introduction d'une nouvelle variable z_k de sorte qu'on ait

$$\varphi_k = [1 - s_R(\varphi_R' + a)^2]^{1/2} z_k \tag{14}$$

transforme la relation (13) en

$$\sum_{k=R+1}^{N} s_k z_k^2 = 1 \tag{15}$$

1) Les équations polyvibrantes ont été appélées par de nombreux hommes de sciences, par ex. Garrett Birkhoff, équations de Mangeron [12], [13].

et par suite la relation (10) prend la forme suivante:

$$f_R(a,c)=\sum_{k=R}^{N}[I_k\varphi_k'-\varphi_{k-1}')^2+\psi_k\varphi_k^2]= \tag{16}$$
$$=[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]\sum_{k=R+1}^{N}[I_k(z_k'-z_{k-1}')^2+\psi_k z_k^2],$$

où l'on a mis

$$z_R'=[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]-1/2\,\varphi_R' \tag{17}$$

et

$$z_R=[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]-1/2\varphi_R\,. \tag{18}$$

Si l'on tient compte de la suite des relations [15], [17], [18], la relation (16) devient

$$f_R(a,c)=[1-s_R'(\varphi_R'+a)^2]f_{R+1}\left[\frac{\varphi_R'+a}{[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]^{1/2}},\ \frac{\varphi_R'}{[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]^{1/2}}\right] \tag{19}$$

et donc, après avoir appliqué le principe de l'optimalité,

$$f_R(a,c)=\min_{\varphi_R'}\left\{I_R(\varphi_R'-c)+\psi_R(\varphi_R'+a)+\right. \tag{20}$$
$$\left.+[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]f_{R+1}\left[\frac{\varphi_R'+a}{[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]^{1/2}},\ \frac{\varphi_R'}{[1-s_R(\varphi_R'+a)^2]^{1/2}}\right]\right\},$$

où l'on doit y ajouter

$$f_{N-1}(a,c)=I_{N-1}(\varphi_{N-1}'-c)^2+I_N(\beta-\varphi_{N-1}')^2+ \tag{21}$$
$$+\psi_{N-1}(\varphi_{N-1}'+a)^2+\psi_N\alpha^2$$

et les conditions à la frontière intermédiaire

$$\varphi_{N-1}'=\left[\frac{1-s_N\alpha^2}{s_{N-1}}\right]^{\frac{1}{2}}-a,\quad \varphi_N=\alpha,\quad \varphi_N'=\beta. \tag{22}$$

3. D'autres conditions à la frontière peuvent être aussi prises en considération.

La connaissance des f_i permet la construction des modes de vibrations respectifs. Les fréquences et les modes de vibrations d'ordre supérieur peuvent être obtenus par un procédé similaire que nous avons appliqué d'ailleurs dans nos études concernant la mécanique technique des vibrations [14]. Dans le cas mentionné ci-dessus on doit y ajouter les restrictions

$$(23) \qquad \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \varphi_k^{(i)} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

où la technique des multiplicateurs de Lagrange peut être appliquée d'une manière bien heureuse.

D'après ce qu'on a souligné lors du Congrès IFAC (Varsovie, 1969), la méthode de la programmation dynamique a été appliquée avec succès dans l'optimisation de différents systèmes hydro-énergétiques et dans les processus des plus variés intéressant l'industrie chimique, tandis que les problèmes d'optimisation concernant la mécanique des corps déformables ont été abordés d'une manière sporadique et en général sans avoir faire appel aux méthodes actuelles d'optimisation mentionnées dès le commencement de cette Note.

Reçue le 13 février 1971

Institut Polytechnique, Jassy
et
Université d'Alberta,
Edmonton, Alberta, Canada

BIBLIOGRAPHIE

1. Quazzo G., *Problèmes de réglage automatique dans les systèmes énergétiques.* Travaux du Congrès IFAC, Varşovie, 1969, 26 p.
2. Ianculescu G., *Automatizarea proceselor chimice.* A.M.C., *15*, 151—154 (1971).
3. Courbon J., *Vibration des poutres.* Ann. Inst. Techn. du bâtiment et de travaux publics, *262*, 1539—1571 (1969).
4. Westcott J., *Metode de calcul de optimizare în sistemele automate.* IFAC, Varşovia, 1969 (traduit dans l'A.M.C., *15*, 13—24 (1970)).
5. Kulikovski R., *Optimizarea sistemelor cu structură complexă.* IFAC, Varşovia, 1969 (traduit dans l'A.M.C., *15*, 41—54 (1970)).
6. Poteraşu V. F., *Problème optimal et applications aux barres, plaques et couches minces* (en roumain). Thèse de doctorat, Institut Polytechnique de Jassy, 1971, bibl. 670 titres.
7. Mangeron D., *Dynamic Programming Concerning some Classes of Polyvibrating Equations.* J. Math. Analysis a. Appl., **9**, *1*, 141—146 (1964).
8. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Programmation dynamique de certaines classes d'équations polyvibrantes.* C. r. Acad. Sci., Paris, **270 A**, 37—40 (1970).
9. Mangeron D., Oguztöreli M. N., Poteraşu V. F., *L'extension polyvibrante des nombres de Fibonacci.* C. r. Acad. Sci., Paris, **271**, 587—589 (1970).
10. Oguztöreli M. N., Mangeron D., *Sur certaines équations fonctionnelles-différentielles-aux différences à plusieurs variables indépendantes.* Proc. Japan Academy, **46**, *6*, 524—528 (1970).
11. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Darboux Problem for a Polyvibrating Equation.* Proc. National Acad. Sci., Washington, **67**, *3*, 1488—1492 (1970).
12. Birkhoff G., *Piecewise Bicubic Interpolation.* Dans le volume „Approximations with Special Emphasis on Spline Functions", Academic Press, New York — London 1969.

13. Oguztöreli M. N., *Eigenvalue Problem for Mangeron's Polyvibrating Equations* (I). Bul. Inst. polit. Iași, **XVII** (**XXI**), *3–4*, s. I (1971).
14. Mangeron D., Shestopal A. F., *Sul problema di analisi spettrale delle piastre.* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 8-e s., **36**, *1*, 37–42 (1964).

PROGRAMAREA DINAMICĂ A PROBLEMEI DETERMINĂRII FRECVENȚELOR ȘI MODURILOR DE VIBRAȚIE ALE UNEI BARE ELASTICE SCUFUNDATĂ ÎNTR-UN MEDIU CONTINUU REZISTENT

(Rezumat)

Se stabilesc ecuațiile necesare pentru determinarea frecvenței fundamentale de vibrație a unei bare de secțiune variabilă și lungime dată, scufundată într-un mediu elastic care exercită o forță transversală de intensitate proporțională cu deplasarea barei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 531.36

ASUPRA MIŞCĂRII UNUI SISTEM DE RIGIDE LEGATE PRIN ARTICULAŢII [1)]

DE

GH. CIOBANU şi GABRIELA NEAGU

Continuăm cu prezentarea unor observaţii asupra mişcării unui sistem de rigide S_1, S_2,... S_n, legate succesiv prin articulaţii presupuse fără frecare, rigidul S_1 fiind legat în plus, tot printr-o articulaţie, de un punct fix.

Într-o comunicare anterioară [3] ecuaţiile mişcării au fost date sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{K}_{0_i} + \overline{O_iO}_{i+1} \times \sum_{s=i+1}^{n} \bar{H}_s\right] = \bar{M}_{0_i} + \overline{O_iO}_{i+1} \times \sum_{s=i+1}^{n} \bar{R}_s + \tag{1}$$

$$+ (\bar{v}_{0_{i+1}} - \bar{v}_{0_i}) \times \sum_{s=i+1}^{u} \bar{H}_s, \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

unde am notat prin $(\bar{M}_{0i}, \bar{R}_i)$ torsorul faţă de O_i al forţelor ce acţionează asupra rigidului S_i, considerînd în plus acum că centrele de masă ale rigidelor S_i coincid cu centrele de rotaţii O_i.

Adunînd membru cu membru ecuaţiile (1) s-a obţinut ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{K}_{0_i} + \sum_{i=2}^{n} \overline{O_1O_i} \times \bar{H}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{0_i} + \sum_{i=2}^{n} \overline{O_1O_i} \times \bar{R}_i. \tag{2}$$

Vom considera în cele ce urmează că singurele forţe ce acţionează asupra sistemului sînt greutăţile rigidelor $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$,...,$\bar{P}_n$.

În acest caz, amplificînd ambii membri ai ecuaţiei (2) cu versorul $\bar{u}$ al direcţiilor forţelor, membrul doi devine zero şi se obţine integrala scalară a momentului cinetic, dată prin ecuaţia

[1)] Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 2–4 iulie 1970.

$$\sum_{i=1}^{n} K_{0_{i/u}} + \sum_{i=2}^{n} K_{0_{1/u}}(\bar{H}_i) = C. \tag{3}$$

Să considerăm cazul mişcării plane — planul vertical — a rigidelor S_i. Punem ecuaţiile (1) ale mişcării sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{K}_{0_i} + \overline{O_iO_{i+1}} \times \bar{v}^{(r)}_{0_{i+1}}\left(\sum_{s=i+1}^{n} M_s\right)\right] = \overline{O_iO_{i+1}} \times \sum_{s=i+1}^{n} \bar{P}_s + \tag{4}$$

$$+ (\bar{v}_{0_{i+1}} - \bar{v}_{0_i}) \times \sum_{s=i+1}^{n} \bar{H}_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{K}_i,$$

unde am notat $\bar{K}_i = \overline{O_iO_{i+1}} \times \sum_{s=i+1}^{n} \bar{H}_s - \overline{O_iO_{i+1}} \times \bar{v}^{(r)}_{0_{i+1}}\left(\sum_{s=i+1}^{n} M_s\right)$.

Paranteza din membrul întîi al ecuaţiei (4) reprezintă momentul cinetic al rigidului S_i faţă de O_i, masa rigidului S_i fiind mărită cu masele rigidelor $S_{i+1}, \ldots, S_n$, concentrate în O_{i+1}; notăm acest moment cinetic cu $\bar{K}'_{0_i}$.

Pentru trei rigide ecuaţiile (4) se scriu:

$$\begin{cases} \dot{\bar{K}}'_{0_1} = \overline{O_1O_2} \times (\bar{P}_2 + \bar{P}_3) + \bar{v}_{0_2} \times (M_2\bar{v}_{0_2} + M_3\bar{v}_{0_3}) - \\ \quad - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overline{O_1O_2} \times (M_2\bar{v}_{0_2} + M_3\bar{v}_{0_1}) - \overline{O_1O_2} \times \bar{v}_{0_2}(M_2 + M_3)\right], \\ \dot{\bar{K}}'_{0_2} = \overline{O_2O_3} \times \bar{P}_3 + (\bar{v}_{0_3} - \bar{v}_{0_2}) \times M_3\bar{v}_{0_3} - \\ \quad - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overline{O_2O_3} \times M_3\bar{v}_{0_3} - \overline{O_2O_3} \times (\bar{v}_{0_3} - \bar{v}_{0_2})\, M_3\right], \\ \dot{\bar{K}}'_{0_3} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Înlocuind vitezele prin expresiile lor, ecuaţiile (5) devin:

$$\begin{cases} \dot{\bar{K}}'_{0_1} = \overline{O_1O_2} \times (\bar{P}_2 + \bar{P}_3) + M_3(\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}) \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{O_2O_3}) - \\ \quad - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_3\overline{O_1O_2} \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{O_2O_3})], \\ \dot{\bar{K}}'_{0_2} = \overline{O_2O_3} \times \bar{P}_3 - M_3(\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}) \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{O_2O_3}) - \\ \quad - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_3\overline{O_2O_3} \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2})], \\ \dot{\bar{K}}'_{0_3} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Dacă amplificăm ambii membri ai ecuațiilor (6) respectiv cu $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ și adunăm membru cu membru, după efectuarea tuturor operațiilor se obține ecuația:

$$\begin{aligned}(7)\qquad &\bar{\omega}_1\dot{\bar{K}}'_{0_1}+\bar{\omega}_2\dot{\bar{K}}'_{0_2}+\bar{\omega}_3\dot{\bar{K}}'_{0_3}\pm M_3\frac{d}{dt}[(\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2)(\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3})]=\\ &=[\overline{O_1O_2}\times(\bar{P}_2+P_3)]\omega_1+(\overline{O_2O_3}\times\bar{P}_3)\bar{\omega}_2.\end{aligned}$$

Se știe că $\bar{K}'_{0_i}=\tau'_i\bar{\omega}_i$, τ'_i fiind tensorul moment de inerție corespunzător, de unde urmează identitatea

$$\frac{d}{dt}[\bar{\omega}_i(\tau'_i\bar{\omega}_i)]=\dot{\bar{\omega}}_i(\tau'_i\bar{\omega}_i)+\bar{\omega}_i(\tau'_i\dot{\bar{\omega}}_i).$$

De asemenea se cunosc relațiile $\dot{\bar{\omega}}_i(\tau'_i\bar{\omega}_i)=\bar{\omega}_i(\tau'_i\dot{\bar{\omega}})$, $\bar{\omega}_i\dot{\bar{K}}'_{0_i}=2E'_i$, care înlocuite în precedenta ne conduc la:

$$\frac{d}{dt}E'_i=\bar{\omega}_i\frac{d}{dt}\bar{K}'_{0_i}.$$

Punînd $\bar{P}_i=P_i\bar{u}$, membrul doi al ecuației (7) devine în cele din urmă:

$$[\overline{O_1O_2}\times(\bar{P}_2+\bar{P}_3)]\bar{\omega}_1+(\overline{O_2O_3}\times\bar{P}_3)\bar{\omega}_2=\frac{d}{dt}(P_2+P_3)\overline{O_1G}\bar{u},$$

unde G este centrul de masă al rigidelor S_2 și S_3.

Aceste rezultate înlocuite în ecuația (7) ne conduc la integrala energiei cinetice:

$$(8)\qquad E'_1+E'_2+E'_3+M_3(\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2)(\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3})-(P_2+P_3)\overline{O_1G}\bar{u}=C.$$

Pentru un sistem de 4 rigide urmînd același drum se obține

$$\begin{aligned}(9)\qquad &E'_1+E'_2+E'_3+E'_4+(M_3+M_4)(\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2)(\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3})+\\ &+M_4(\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3)(\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_3O_4})+M_4(\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3)(\overline{O_2O_3}\cdot\overline{O_3O_4})-P\overline{O_1G}\bar{u}=C,\end{aligned}$$

unde G este centrul de masă al rigidelor S_2, S_3, S_4 și P — greutatea lor.

Pentru un sistem de n rigide integrala energiei devine:

$$(10)\quad \sum_{i=1}^{n} E_i' + \sum \left[(\bar{\omega}_k \bar{\omega}_l)(\overline{O_k O_{k+1}} \cdot \overline{O_l O_{l+1}}) \left(\sum_{s=l+1}^{n} M_s \right) \right] - P\overline{O_1 G}\,\bar{u} = C,$$

k, l fiind o combinare a numerilor întregi de la 1 la $n-1$ luate cîte două.

Primită la 15 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mecanică teoretică

BIBLIOGRAFIE

1. Agostinelli C., Atti R. Accad. Sc. Torino, **75**, *1*, 249—263 (1939—1940).
2. Bradistilov G., Boiadjiev G., Bul. Inst. polit. Iași, **VIII (XII)**, *1—2*, 77—82 (1962).
3. Ciobanu Gh., Bul. Inst. polit. Iasi, **XI (XV)**, *1—2*, 295—297 (1965).

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS SOLIDES INDÉFORMABLES LIÉS PAR DES ARTICULATIONS

(Résumé)

Dans cette Note on trouve, pour un système particulier de forces — les poids des corps dont les centres de gravité coïncident avec les articulations — l'intégrale scalaire du moment cinétique ; si les articulations sont situées dans le même plan vertical, on trouve l'intégrale de l'énergie cinétique pour trois corps (8), pour quatre corps (9) et pour n corps (10).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 531.31

SUR LES LIAISONS NONHOLONOMES IMPOSÉES AUX SYSTÈMES MÉCANIQUES AYANT DES SOLIDES RIGIDES COMME ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS

I. LIAISONS NONHOLONOMES RÉALISÉES PAR DES APPUIS AVEC GLISSEMENT TANGENTIEL, SANS ROULEMENT

PAR

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU et GABRIELA NEAGU

1. Introduction

Une présentation presque complète des principaux résultats obtenus dans la mécanique analytique des systèmes soumis à des liaisons nonholonomes a été effectuée dans le livre de Iu. I. Neimark et N. A. Fufaev, intitulé *Dynamique des systèmes nonholonomes* et publié dans la langue russe, en 1969 [5].

Il faut mentionner toutefois que dans tous les travaux publiés dans la littérature de spécialité, concernant la mécanique analytique des systèmes nonholonomes, on considère, invariablement, le point matériel, défini au sens newtonien, comme élément constitutif des sistèmes mécaniques.

Une telle conception dans la construction de la mécanique analytique qui introduit des images déformées autant sur les grandeurs physiques qui figurent dans les équations de mouvement — paramètres de position, paramètres cinématiques de premier et de deuxième ordre, réactions des liaisons, déplacements élémentaires etc. — , qu'aussi sur les relations fondamentales qui expriment des réalités physiques concrètes — équations de liaisons, conditions restrictives pour les paramètres cinématiques, l'égalité avec zéro du travail virtuel des réactions, relations de transitivité etc. — est bien loin de réfléter justement la réalité réncontrée dans la pratique de l'ingénieur. Il suffit, par exemple, d'observer qu'on admet l'égalité avec zéro du travail virtuel des réactions des liaisons nonholonomes, sans aucune justification basée sur l'analyse de la nature de ces réactions pour les divers types de liaisons rencontrées dans la pratique.

Les considérations faites attèstent la nécessité, au moins, au point de vue de la mécanique technique, d'élaborer une nouvelle présentation de la mécanique analytique des systèmes nonholonomes, conforme à un modèle mécanique plus adéquat à la réalité pratique, c'est-à-dire le solide rigide comme élément constitutif des sistèmes mécaniques.

Cette tentative implique, évidemment, la résolution préalable de quelques problèmes importants de mécanique analytique, parmi lesquels on peut mentionner:

a) l'analyse des divers types de liaisons nonholonomes rencontrées dans la pratique, de la forme des équations des liaisons, de la forme des conditions restrictives imposées aux paramètres cinématiques par ces liaisons;

b) l'analyse des réactions des liaisons nonholonomes et la justification rigoureuse de l'égalité avec zéro du travail virtuel de ces réactions;

c) l'établissement des relations de transitivité en concordance avec le nouveau modèle adopté;

d) la déduction des nouvelles formes des équations du mouvement des systèmes nonholonomes, correspondantes au nouveau modèle accepté.

Les auteurs, tout en se proposant de répondre à ces questions, présentent dans cette première Note l'analyse des liaisons nonholonomes rencontrées dans la pratique, réalisées par des appuis avec du glissement tangentiel, sans roulement.

2. Appui sur un plan en mouvement plan-parallèle, réalisé a l'aide d'un patin

Soit (Π_1), le plan en mouvement plan-parallèle dans le plan Ox_1x_2, fixe dans l'espace. Au plan (Π_1) est attaché le repère $Q_1x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}$, dont la position est déterminée par les paramètres de position:

$$x_{Q_{11}} = x_{Q_{11}}(t), \quad x_{Q_{12}} = x_{Q_{12}}(t), \quad \theta_1 = \theta_1(t). \tag{1}$$

Sur le plan (Π_1) appuie le solide (S_2), par l'intermède d'un patin en C_2, les autres deux points d'appui, D_2 et E_2, ayant des déplacements libres dans le plan (Π_1).

Au solide est attaché le repère $Q_2x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}$, avec l'axe $Q_2x_1^{(2)}$ parallèle à la droite d'intersection entre le plan du patin et le plan (Π_1), avec l'axe $Q_2x_3^{(2)}$ normale au plan (Π_1) et avec l'axe $Q_2x_2^{(2)}$ complétant le trièdre triorthogonal droit (fig. 1).

Le mouvement du solide (S_2) est déterminé par les paramètres de position:

$$x_{Q_{21}} = x_{Q_{21}}(t), \quad x_{Q_{22}} = x_{Q_{22}}(t), \quad \theta_2 = \theta_2(t). \tag{2}$$

L'appui par le patin en C_2 introduit une liaison cinématique intérieure nonholonome entre le plan (Π_1) et le solide (S_2) exprimée par la relation :

$$\bar{v}_{C_{2_r}} = \lambda\bar{\beta}, \tag{3}$$

où :

$$\bar{v}_{C_{2_r}} = \bar{v}_{C_2} - \bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{Q_2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}'^{(2)}_{C_2} - \bar{v}_{Q_1} - \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'^{(1)}_{C_1} \tag{4}$$

est la vitesse relative par rapport au plan (Π_1) du point C_2 du solide (S_2) et :

$$\bar{\beta} = \bar{i}_1^{(2)} = \alpha_k^{(2)}\bar{i}_k = \cos\theta_2\bar{i}_1 + \sin\theta_2\bar{i}_2, \quad (k = 1, 2) \tag{5}$$

est le vecteur unitaire de l'axe Δ_{C_2}.

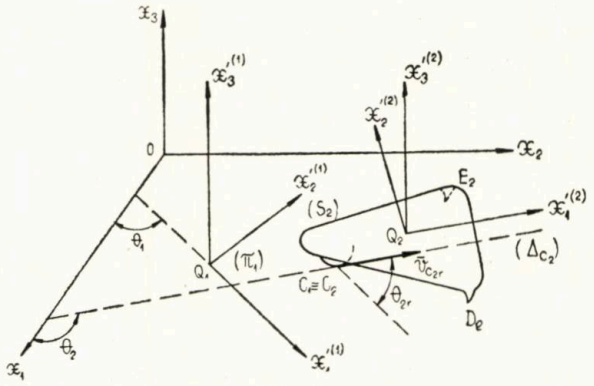


Fig. 1

Tout en introduisant (4) et (5) dans (3) on obtient, après la projection de la relation vectorielle ainsi obtenue sur les axes fixes et après l'élimination de λ, l'équation de la liaison nonholonome appliquée, sous la forme :

$$b_{ij}\dot{x}_{Q\,ij} + b_{i0}\dot{\theta}_i = 0\,^{1)}, \quad (i, j = 1, 2), \tag{6}$$

avec :

$$\begin{cases} b_{11} = -\sin\theta_2, & b_{12} = \cos\theta_2, \\ b_{21} = \sin\theta_2, & b_{22} = -\cos\theta_2, \\ b_{10} = -(\cos\theta_2\, x'^{(1)}_{C_{11}} + \sin\theta_2 x'^{(1)}_{C_{12}}), \\ b_{20} = \cos\theta_2\, x'^{(2)}_{C_{21}} + \sin\theta_2 x'^{(2)}_{C_{22}}, \end{cases} \tag{7}$$

1) On adopte la convention d'indices muets.

où:

$$x'^{(1)}_{C_1\sigma} = \bar{r}'^{(1)}_{C_1} \bar{i}^{(1)}_{\sigma} = (\bar{r}_{Q_2} - \bar{r}_{Q_1} + \bar{r}'^{(2)}_{C_2}) \bar{i}^{(1)}_{\sigma} =$$

$$= (x_{Q_{2k}} - x_{Q_{1k}}) \alpha^{(1)}_{k\sigma} + x'^{(2)}_{C_{2k}} \alpha^{(2)}_{kh} \alpha^{(1)}_{\sigma h} = x'^{(1)}_{C_{1\sigma}}(x_{Q_{\mu\nu}}, \theta_\mu), \tag{8}$$

$$(h, k = 1, 2,; \quad \sigma = 1, 2; \quad \mu, \nu = 1, 2).$$

On voit donc qu'on peut écrire en général:

$$\begin{cases} b_{ij} = b_{ij}(x_{Q_{\mu\nu}}, \theta_\mu), \\ b_{i0} = b_{i0}(x_{Q_{\mu\nu}}, \theta_\mu), \quad (\mu, \nu = 1, 2; \; i, j = 1, 2). \end{cases} \tag{9}$$

La condition (3) écrite maintenant sous la forme:

$$\bar{v}_{Q_1} - \bar{v}_{Q_2} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'^{(1)}_{C_1} - \bar{\omega}_2 \times \bar{r}'^{(2)}_{C_2} = \bar{\lambda}\bar{\beta} \tag{10}$$

permet d'établir la condition restrictive imposée par cette liaison nonholonome aux paramètres cinématiques des solides.

En effet, si l'on multiplie, scalaire, la relation (10) avec le verseur $\bar{n}$, normale au vecteur $\bar{\beta}$ et situé dans le plan (Π_1), on obtient, apprès l'introduction des vecteurs:

$$\bar{n} = \bar{\beta}_1 = -\bar{\beta}_2, \tag{11}$$

la condition cherchée:

$$\bar{\beta}_i \bar{v}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i) \bar{\omega}_i = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{12}$$

$\bar{\beta}_1$ et $\bar{\beta}_2$ représentant donc *les paramètres vectoriels de la liaison nonholonome* considérée [2].

La dérivation par rapport au temps de la relation (12) conduit à la condition restrictive imposée aux paramètres cinématiques de deuxième ordre des solides:

$$\bar{\beta}_i \bar{a}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i) \bar{\varepsilon}_i + \Phi = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{13}$$

Φ représentant les termes qui ne contiennent pas $\bar{a}_{Q_i}$ et $\bar{\varepsilon}_i$.

En vertu de la condition restrictive (12) on obtient aussi la condition de compatibilité avec la liaison des déplacements virtuels du solide et du plan (Π_1):

$$\delta \bar{r}_{Q_\nu} = \frac{\partial \bar{r}_{Q_\nu}}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta \bar{\theta}_\nu = \frac{\partial \bar{\theta}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j, \tag{14}$$

$$(j = 1, 2, .. p; \quad \nu = 1, 2),$$

avec :

$$\frac{\partial \bar{\theta}_\nu}{\partial q_j} = \frac{\partial \theta_{\nu_p}}{\partial q_j}\bar{i}_3 + \frac{\partial \theta_{\nu_r}}{\partial q_j}\bar{i}_3^{(\nu)} + \frac{\partial \theta_{\nu_n}}{\partial q_j}\bar{n}^{(\nu)}, \tag{15}$$

cette condition ayant la forme :

$$\bar{\beta}_i \delta \bar{r}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i)\,\bar{\delta}\theta_i = 0, \quad (i = 1,2). \tag{16}$$

En fin, on peut ajouter qu'à la liaison nonholonome (3) ou (6) correspondent deux forces intérieures $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$, qui agissent sur les deux corps liés — le plan (Π_1) et le solid (S_2) —, ces forces étant situées dans le plan (Π_1), normales à l'axe Δ_{C_2}. Pour les composantes des torseurs de ces forces dans les pôles liés aux solides on peut donc écrire les expressions :

$$\begin{cases} \bar{F}_{12} = \lambda\bar{\beta}_1, \\ \bar{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{F}_{12}) = \bar{\mathcal{M}}_{Q_1}(\lambda\bar{\beta}_1) = \lambda\bar{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{\beta}_1) \end{cases} \tag{17}$$

et :

$$\begin{cases} \bar{F}_{21} = \lambda\bar{\beta}_2, \\ \bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{F}_{21}) = \bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\lambda\bar{\beta}_2) = \lambda\bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{\beta}_2). \end{cases} \tag{18}$$

Le travail virtuel de ces forces aura l'expression :

$$\delta L_{\text{int}} = \bar{F}_{12}\delta\bar{r}_{Q_1} + \bar{\mathcal{M}}_{Q1}(\bar{F}_{12})\,\bar{\delta}\theta_1 + \bar{F}_{21}\delta\bar{r}_{Q_2} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{F}_{21})\,\bar{\delta}\theta_2 =$$
$$= \lambda(\bar{\beta}_i\delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i)\,\bar{\delta}\theta_i), \quad (i = 1,2),$$

d'où en résulte, en vertu de la condition (16), la conclusion :

$$\delta L_{\text{int}} = 0, \tag{20}$$

qui permettra d'éliminer les réactions inconues de la liaison nonholonome considérée dans les équations du mouvement.

3. Appui sur un plan fixe, réalisé par un patin (la luge de Tcheapliguin)

Cette liaison peut être considérée comme un cas particulier de la liaison précédente, correspondant aux conditions :

$$x_{Q_{11}} = x_{Q_{12}} = 0, \quad \theta_1 = 0, \tag{21}$$

rencontrées lorsque la liaison nonholonome est extérieure.

Tout en adoptant les notations:

$$x_{Q21} = x_{Q1}, \quad x_{Q22} = x_{Q2}, \quad \theta_2 = \theta, \quad C_2 = C, \quad x'^{(2)}_{C_2} = x'_C;$$

$$\bar{\beta}_2 = \bar{\beta}, \quad \bar{v}_{Q_2} = \bar{v}_Q, \quad \bar{a}_{Q_2} = \bar{a}_Q, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon},$$

les relations (6), (12), (13), (16) et (19) prennent les formes:

$$b_j \dot{x}_{Q_j} + b_0 \dot{\theta} = 0, \quad (j = 1, 2) \tag{22}$$

avec:

$$\begin{cases} b_1 = -\sin\theta, \\ b_2 = \cos\theta, \\ b_0 = \cos\theta\, x'_{C_1} + \sin\theta\, x'_{C_2}, \end{cases} \tag{23}$$

$$\bar{\beta}\bar{v}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\beta})\bar{\omega} = 0, \tag{24}$$

$$\bar{\beta}\bar{a}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\beta})\bar{\varepsilon} + \Phi = 0, \tag{25}$$

$$\bar{\beta}\,\delta\bar{r}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\beta})\,\delta\bar{\theta} = 0 \tag{26}$$

et

$$\delta L_R = \lambda[\bar{\beta}\,\delta\bar{r}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\beta})\,\delta\bar{\theta}], \tag{27}$$

avec la conséquence:

$$\delta L_R = 0, \tag{28}$$

en vertu de la condition (27).

Dans une autre Note, qui sera insérée dans le prochain numero de ce *Bulletin*, seront examinées les liaisons nonholonomes rencontrées dans la pratique, réalisées par des appuis avec roulement, sans glissement, après quoi on tira les conclusions qui en résultent de cette présentation du problème des liaisons nonholonomes fondée sur le nouveau modèle mécanique qui est le solide rigide.

Reçue le 8 avril 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N, *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **X(XIV)**, *3–4* (1964).
2. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIII(XVII)**, *1–2* et *3–4* (1967).

3. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIV(XVIII)**, *3–4* (1968).
4. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIV (XVIII)**, *3–4* (1968).
5. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., *Динамика неголономных систем.* Изд. „Наука", М., 1967, стр. 161–178.
6. Whittacker E. T., *Analytical Dynamics.* Cambridge, 1937.

ASUPRA LEGĂTURILOR NEOLONOME IMPUSE SISTEMELOR MECANICE AVÎND SOLIDE RIGIDE CA ELEMENTE CONSTITUTIVE

I. Legături neolonome realizate prin reazeme cu alunecare tangențială, fără rostogolire

(Rezumat)

În această primă Notă se examinează două din tipurile de legături neolonome întîlnite în practică, realizate prin reazeme cu alunecare tangențială și fără rostogolire, stabilindu-se ecuațiile de legătură, condițiile restrictive impuse parametrilor cinematici de ordinul întîi și doi, condițiile de compatibilitate cu legăturile ale deplasărilor virtuale și justificîndu-se riguros egalitatea cu zero a lucrului mecanic virtual al reacțiunilor acestor legături, sub forma corespunzătoare noului model mecanic adoptat, solidul rigid.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621–50

FREQUENCY RESPONSE OF FIRST ORDER SYSTEMS TO AMPLITUDE MODULATED INPUTS

III. GENERAL HARMONIC MODULATED INPUTS

BY

ALFRED BRAIER

1. Introduction

In [1], [2] the symbolic representation of amplitude modulated inputs, introduced by the author, has been utilised in order to study the frequency response of first order systems [3]

$$W(s) = \frac{1}{Ts+1} \tag{1}$$

to inputs

$$x(t)=Xe^{\delta t}\sin(pt+\psi)\sin(\omega t+\varphi) \quad \text{and} \quad x(t)=(Xt+Y)e^{\delta t}\sin(\omega t+\varphi). \tag{2}$$

In this paper new frequency response curves are to be established for the steady-state response of system (1) to inputs

$$x(t) = X[1 + \mu \sin(pt + \psi)]e^{\delta t}\sin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

where $A(t) = X[1 + \mu \sin(pt + \psi)]e^{\delta t}$ represents the amplitude modulation (X, δ, μ, p, ω, ψ and φ as constant quantities and $p < \omega$).

Signal (3) will be called oscillation with *general harmonic amplitude modulation.*

2. Symbolic Representation of General Harmonic Amplitude Modulated Oscillations

2.1. The symbolic representation of function (3) was studyied in [4], [5]. This representation implies the use of an algebra of order six, direct sum of complex and $\mathcal{P}$-polynions algebras.

Here we can start from the remark that function (3) is

$$x = x_1(t) + x_2(t) = Xe^{\delta t}\sin(\omega t + \varphi) + X\mu e^{\delta t}\sin(pt + \psi)\sin(\omega t + \varphi).$$

To the first function can be attached a complex number $\hat{z}$ with the derivation operator $\hat{d}_1$, to the second — a $\mathcal{P}$-polynion $\hat{v}$, with the derivation operator $\hat{d}_2$, namely

$$(4)\qquad \begin{cases} \hat{z} = a_1 + a_2 j, \quad \hat{v} = a_3 + a_4 i + a_5 j + a_6 ij, \\ \hat{d}_1 = \delta + \omega j, \quad \hat{d}_2 = \delta + p1 + \omega j, \qquad i^2 = j^2 = -1, \ (ij)^2 = (ji)^2 = 1, \end{cases}$$

where

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1 = X\cos\varphi, \quad a_3 = X\mu\cos\psi\cos\varphi, \quad a_5 = X\mu\cos\psi\sin\varphi, \\ a_2 = X\sin\varphi, \quad a_4 = X\mu\sin\psi\cos\varphi, \quad a_6 = X\mu\sin\psi\sin\varphi. \end{cases}$$

Hence, the hypercomplex number $\hat{w}$ attached to (3) and the respecrive derivation operator $\hat{d}$ can be written as

$$(6)\qquad \begin{cases} \hat{w} = \hat{z}E_1 + \hat{v}E_2, \quad \hat{d} = \hat{d}_1 E_1 + \hat{d}_2 E_2, \\ E_1^2 = E_1, \ E_2^2 = E_2, \ E_1E_2 = E_2E_1 = 0. \end{cases}$$

That means that to the derivative with respect to t of function (3) $-\mathrm{d}f/\mathrm{d}t-$ corresponds the element $\hat{d}\hat{w}$, obtained by multiplying (6_1) with (6_2), according to the rules (4_5) and (6_3). The algebra is clearly commutative and associative.

Obviously, the components (5) of the particular element $\hat{w}$ attached to function (3) satisfy the conditions

$$(7)\qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_5} = \frac{a_4}{a_6};$$

such $\hat{w}$ will be called special elements.

If $a_1, \ldots, a_6$ satisfying (7) are given, then the quantities which characterize the modulated oscillation (3) result in

$$(8)\qquad \begin{cases} X = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, & \mu = \dfrac{\sqrt{a_3^2 + a_4^2}}{|a_1|}\left(= \dfrac{\sqrt{a_5^2 + a_6^2}}{|a_2|}\right), \\ \tan\varphi = \dfrac{a_2}{a_1}, & \operatorname{sgn}(\sin\varphi) = \operatorname{sgn} a_2, \\ \tan\psi = \dfrac{a_4}{a_3}\left(= \dfrac{a_6}{a_5}\right), & \operatorname{sgn}(\sin\psi) = \operatorname{sgn}(a_1 a_4)[= \operatorname{sgn}(a_2 a_6)]. \end{cases}$$

Let now introduce in relation (6_1) the components (5) of $\hat{z}$ and $\hat{v}$, given by (4). It follows the exponential form of a special element, namely

$$\hat{w} = Xe^{j\varphi}(E_1 + \mu e^{j\psi}E_2), \tag{9}$$

where the exponentials have the usual meaning. In (9) are present the known exponential forms of a complex number and of a special $\mathcal{P}$-polynion [1]. Formula (9) contains in a remarquable form all the quantities which characterize an oscillation with general harmonic amplitude modulation of type (3).

2.2. If the components $a_1,...,a_6$ of an hypercomplex number belonging to the algebra studyied here does not satisfy (7), that means that the complex component $\hat{z}$ and $\mathcal{P}$-polynion component $\hat{v}$ of (6_1) are completely arbitrary. Thus $\hat{z} = Ae^{j\alpha}$, $\hat{v} = (U + Vij)e^{i\psi}e^{j\varphi}$ (see [7]) and $\hat{w} = Ae^{j\alpha}E_1 + (U + Vij)e^{i\psi}e^{j\varphi}E_2$. If we write $Ae^{j\alpha} = Ae^{j(\alpha-\varphi)}e^{j\varphi} = (X + Yj)e^{j\varphi}$, then

$$\hat{w} = [(X + Yj)E_1 + (U + Vij)e^{i\psi}E_2]e^{j\varphi}. \tag{10}$$

Instead of (5) one obtains now

$$a_1 = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \quad a_2 = X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \tag{11}$$

$$\begin{cases} a_3 = U\cos\psi\cos\varphi + V\sin\psi\sin\varphi, & a_5 = U\cos\psi\sin\varphi - V\sin\psi\cos\varphi, \\ a_4 = U\sin\psi\cos\varphi - V\cos\psi\sin\varphi, & a_6 = U\sin\psi\sin\varphi + V\cos\psi\cos\varphi. \end{cases} \tag{12}$$

It follows immediately $U^2 + V^2 = a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$ and $UV = a_3a_6 - a_4a_5$, therefore

$$U, V = \frac{1}{2}[\sqrt{(a_3 + a_6)^2 + (a_4 - a_5)^2} \pm \sqrt{(a_3 - a_6)^2 + (a_4 + a_5)^2}] \tag{13}$$

(see also [1, (6) and (7)]; formulae (63) are equivalent to (7_1) from [1]). Also

$$\tan\varphi = \frac{a_5U + a_4V}{a_3U - a_6V}\left(= \frac{a_6U - a_3V}{a_4U + a_5V}\right), \quad \tan\psi = \frac{a_6U - a_3V}{a_5U + a_4V}\left(= \frac{a_4U + a_5V}{a_3U + a_6V}\right),$$

which can be written as

$$\begin{cases} \tan\varphi, \tan\psi = \sqrt{\Gamma^2 + 1} - \Gamma, \quad \text{with} \\ \Gamma_\varphi = \dfrac{a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 - a_6^2}{2(a_3a_5 + a_4a_6)}, \quad \Gamma_\psi = \dfrac{a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2}{2(a_3a_4 + a_5a_6)}. \end{cases} \tag{14}$$

Finally, (11) results in

$$X = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi, \quad Y = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi. \tag{15}$$

Denoting

$$\mu = \frac{U}{X}, \qquad \mu = \frac{V}{Y} \tag{16}$$

and taking into account that $je^{j\varphi} = e^{j(\varphi+\pi/2)}$, $ie^{i\psi} = e^{(i\psi+\pi/2)}$, the hypercomplex number (10) becomes

$$\hat{w} = Xe^{j\varphi}(E_1 + \mu e^{i\psi}E_2) + Ye^{j(\varphi+\pi/2)}(E_1 + \nu e^{i(\psi+\pi/2)}E_2). \tag{17}$$

By virtue of the correspondence between (9) and (3) it follows that an arbitrary hypercomplex number (6_1) represents symbolically the function

$$\begin{aligned} x(t) = \{ &X[1 + \mu \sin(pt + \psi)] \sin(\omega t + \varphi) + \\ &+ Y[1 + \nu \cos(pt + \psi)] \cos(\omega t + \varphi)\} e^{\delta t}, \end{aligned} \tag{18}$$

with the derivation operator (6_2). The motion (18) is a superposition of two oscillations with general harmonic amplitude modulation.

Let element (11), (12) be divisor of zero in the respective algebra $(U = \pm V)$ i.e.

$$a_3 - a_6 = 0,\ a_4 + a_5 = 0 \quad \text{or} \quad a_3 + a_6 = 0,\ a_4 - a_5 = 0. \tag{19}$$

By putting, for instance, $a_1 = A\cos\varphi$, $a_2 = A\sin\varphi$, $a_3 = a$ and $a_4 = b$, (13) gives $U = \pm V = \sqrt{a^2 + b^2}$, while (12) results in $\cos(\psi \mp \varphi) = a/\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin(\psi \mp \varphi) = b/\sqrt{a^2 + b^2}$. This allows to calculate the phase angle ψ.

The motions corresponding to the two types of divisors of zero (19), written as (6_1), where $\hat{v}$ is divisor of zero in the $\mathcal{P}$-polynions algebra [1], are given by

$$x(t) = \{A \sin(\omega t + \varphi) \pm B[\cos(p \mp \omega)t + (\psi \mp \varphi)]\} e^{\delta t}, \tag{20}$$

with

$$\begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad B = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \dfrac{a_2}{a_1}, \\ \tan(\psi \mp \varphi) = \dfrac{b}{a}, \quad (a = a_3 = \pm a_6,\ b = a_4 = \mp a_5). \end{cases} \tag{21}$$

The motions (20) are „degenerated", resulting from a superposition of two oscillations, one with general harmonic amplitude modulation, and the other modulated only simple harmonic.

Another interesting degenerated motion is represented by the hypercomplex number (10) with $X = 0$ or $Y = 0$. For instance, if $X = 0$,

$$\begin{aligned} x(t) = \Big\{ &Y\left[1 + \frac{V}{Y}\cos(pt + \psi)\right] \cos(\omega t + \varphi) + \\ &+ U \sin(pt + \psi) \sin(\omega t + \varphi) \Big\} e^{\delta t}. \end{aligned} \tag{22}$$

2.3. The inverse of an hypercomplex number (6_1) $\widehat{w} = \widehat{z}\mathrm{E}_1 + \widehat{v}\mathrm{E}_2$ which is not divisor of zero, is obviously $1/\widehat{w} = (1/\widehat{z})\mathrm{E}_1 + (1/\widehat{v})\mathrm{E}_2$. Taking into account (10) and the result [1, (13)], it follows

$$\frac{1}{\widehat{w}} = \left(\frac{X - Y\mathrm{j}}{X^2 + Y^2}\mathrm{E}_1 + \frac{U - V\mathrm{ij}}{U^2 - V^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}\mathrm{E}_2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}. \tag{23}$$

With help of the same expression (10), the multiplication of two hypercomplex numbers becomes

$$\begin{aligned}\widehat{w}_1\widehat{w}_2 &= [(X_1 + Y_1\mathrm{j})\mathrm{E}_1 + (U_1 + V_1\mathrm{ij})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}\mathrm{E}_2]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\cdot\\ &\cdot[(X_2 + Y_2\mathrm{j})\mathrm{E}_1 + (U_2 + V_2\mathrm{ij})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_2}\mathrm{E}_2]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} =\\ &= \{[(X_1X_2 - Y_1Y_2) + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\mathrm{j}]\mathrm{E}_1 +\\ &+ [U_1U_2 + V_1V_2) + (U_1V_2 + U_2V_1)\mathrm{ij}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi_1+\psi_2)}]\mathrm{E}_2\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}.\end{aligned} \tag{24}$$

We conclude that the product (respective division) of two special hypercomplex numbers ($Y_1 = Y_2 = V_1 = V_2 = 0$) is also a special one. If

$$\begin{cases} X_1Y_2 + X_2Y_1 = 0,\\ U_1V_2 + U_2V_1 = 0, \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} X_1X_2 - Y_1Y_2 = 0,\\ U_1U_2 + V_1V_2 = 0, \end{cases} \tag{25}$$

the product of two arbitrary hypercomplex numbers gives again a special one.

2.4. Let finally return to (18) and denote

$$\begin{cases} X[1 + \mu\sin(pt + \psi)]\mathrm{e}^{\delta t} = \mathcal{A}(t)\cos\Theta(t),\\ Y[1 + \nu\cos(pt + \psi)]\mathrm{e}^{\delta t} = \mathcal{A}(t)\sin\Theta(t). \end{cases} \tag{26}$$

It follows that

$$x(t) = \mathcal{A}(t)\sin[\omega t + \Theta(t)], \tag{27}$$

where

$$\begin{cases} \mathcal{A}(t) = \sqrt{X^2[1 + \mu\sin(pt + \psi)]^2 + Y^2[1 + \nu\cos(pt + \psi)]^2}\,\mathrm{e}^{\delta t},\\ \tan\Theta(t) = \dfrac{Y[1 + \nu\cos(pt + \psi)]}{X[1 + \mu\sin(pt + \psi)]}. \end{cases} \tag{28}$$

That means that with the derivation operator (6_2), an hypercomplex number (10) represents symbolically the amplitude and phase modulated oscillation (18) (or (27), (28)); a special hypercomplex number (7) (i.e. (9)) corresponds to an oscillation purely amplitude modulated (3), while the divisors of zero (19) represent „degenerated" motions of type (20).

3. Steady-State Response of First Order System to General Harmonic Amplitude Modulated Inputs

3.1. Let $\hat{X}_{(i)}$ be the hypercomplex number attached to input (3) (or more generally to (18)) applied to a first order system (1). Then, the element $\hat{X}_{(o)}$ which represents symbolically the steady-state output (with vanishing initial conditions) is

$$\hat{X}_{(o)} = \hat{W}(\hat{d})\hat{X}_{(i)}. \tag{29}$$

The hypercomplex number $\hat{W}(\hat{d})$ is the system transferance (introduced in [6]), which results by replacing in (1) the usual variable by the derivation operator (6_2). It becomes $\hat{W}(\hat{d}) = 1/(T\hat{d} + \hat{u})$, where $\hat{u}$ is the unit in the respective algebra.

Obviously, here $\hat{u} = E_1 + E_2$ (since only the product $\hat{u}\hat{w}$ gives $\hat{w}$). By using $\hat{d} = (\delta + \omega j)E_1 + (\delta + pi + \omega j)E_2$ and $\hat{u}$, $\hat{W}(\hat{d})$ becomes

$$\hat{W} = \frac{1}{[(1 + T\delta) + T\omega j]E_1 + [(1 + T\delta) + Tpi + T\omega j]E_2} \left(= \frac{1}{\hat{K}}\right). \tag{30}$$

The components of $\hat{\kappa}$ are clearly

$$k_1 = k_3 = 1 + T\delta, \quad k_2 = k_5 = T\omega, \quad k_4 = Tp, \quad k_6 = 0. \tag{31}$$

It results that the transferance denominator $\hat{K} = [(K_1 + K_2 j)E_1 + (K_3 + K_4 ij)e^{i\Psi}E_2]\, e^{j\Phi}$ and $\hat{W} = 1/\hat{K}$ itself cannot be a special element of type (7) (since $k_6 = 0$ and $k_4 = Tp \neq 0$). Also, $\hat{K}$ cannot be divisor of zero (19) (since $p < \omega$).

Therefore, if $\hat{X}_{(i)}$ is a special element, $\hat{X}_{(o)}$ results an arbitrary one, respectively *an input of type* (3) *applied to a first order system yields always to a steady-state output like* (18) (i.e. in addition phase modulated (see (27)) *that is distorsionated*. The distorsion is negligible only if

$$Tp \approx 0. \tag{32}$$

By means of (31), (23) and (10), one obtains the exponential form of the transferance (30), namely

$$\hat{W} = [(W_1 + W_2 j)E_1 + (W_3 + W_4 ij)e^{-i\Psi}E_2]\, e^{-j\Phi}. \tag{33}$$

The quantities $W_1 = K_1/(K_1^2 + K_2^2)$, $W_2 = -K_2/(K_1^2 + K_2^2)$, $W_3 = K_3/K_3^2 - K_4^2)$,

$W_4 = K_4/(K_3^2 - K_4^2)$, Ψ and Φ are to be calculated by applying formulae (13)...(15) to $\widehat{K}$ expressed by (31) (here $X \to K_1$, $Y \to K_2$, $U \to K_3$, $V \to K_4$, $\psi \to \Psi$, $\varphi \to \Phi$).

It follows

$$(34)\quad \begin{cases} p \tan \Psi,\ \omega \tan \Phi = \dfrac{MN - [(1 + T\delta)^2 \pm T^2(\omega^2 - p^2)]}{2T(1 + \delta)}, \\ W_1 = \dfrac{(1 + T\delta)\cos\Phi + T\omega \sin\Phi}{(1 + T\delta)^2 + T^2\omega^2}, \quad W_2 = \dfrac{(1 + T\delta)\sin\Phi - T\omega\cos\Phi}{(1 + T\delta)^2 + T^2\omega^2}, \\ W_3,\ W_4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{M \pm N}{MN}, \quad \text{where} \quad M, N = \sqrt{(1 + T\delta)^2 + T^2(\omega \pm p)^2}. \end{cases}$$

3.2. The hypercomplex number $\widehat{X}_{(o)}$ attached to the output produced by (3) is to be obtained by multiplying (9) by (33), which gives

$$(35)\quad \widehat{X}_{(o)} = [(XW_1 + XW_2 j)\,E_1 + (X\mu W_3 + X\mu W_4 ij)\,e^{j(\psi - \Psi)}\,E_2]\,e^{j(\varphi - \Phi)}.$$

By virtue of the indicated correspondence between hypercomplex numbers (10) and functions (18) one obtains the dependence on the time of the steady-state output produced by signal (3), namely

$$(36)\quad \begin{aligned} x_{(o)}(t) = \{&XW_1[1 + \mu_1 \sin(pt + \psi - \Psi)]\sin(\omega t + \varphi - \Phi) + \\ &+ XW_2[1 + \mu_2 \cos(pt + \psi - \Psi)]\cos(\omega t + \varphi - \Phi)\}\,e^{\delta t}, \end{aligned}$$

where

$$(37)\quad \mu_1 = \mu\frac{W_3}{W_1}, \qquad \mu_2 = \mu\frac{W_4}{W_2}.$$

The term characterized by XW_1 mai be called „main component", and the other — „distorsion component".

Particular cases. a) An important signal as

$$(38)\quad x(t) = X[1 + \mu \sin(pt + \psi)]\sin(\omega t + \varphi)$$

corresponds to $\delta = 0$ and (34) become

$$(39)\quad \begin{cases} 2pT\tan\Psi,\ 2\omega T\tan\Phi = \sqrt{1 + T^2(\omega + p)^2}\sqrt{1 + T^2(\omega - p)^2} - \\ \qquad\qquad - [1 \pm T^2(\omega^2 - p^2)], \\ W_1 = \dfrac{\cos\Phi + T\omega\sin\Phi}{1 + T^2\omega^2}, \quad W_2 = \dfrac{\sin\Phi - T\omega\cos\Phi}{1 + T^2\omega^2}, \\ W_3, W_4 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{1 + T^2(\omega + p)^2} \pm \sqrt{1 + T^2(\omega - p)^2}}{\sqrt{1 + T^2(\omega + p)^2}\sqrt{1 + T^2(\omega - p)^2}}. \end{cases}$$

b) If the atenuation constant δ and the system time constant T satisfy the relation

$$1 + T\delta = 0, \tag{40}$$

the transferance $\hat{W} = 1/\hat{K}$ results immediately

$$\hat{W} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega T}\mathrm{E}_1 + \frac{p\mathrm{i} - \omega\mathrm{j}}{T(\omega^2 - p^2)}\mathrm{E}_2 \tag{41}$$

and for $\hat{X}_{(o)} = \hat{W}\hat{X}_{(i)}$, (22) gives

$$x_{(o)}(t) = \left\{\frac{X}{T\omega}\left[1 + \frac{\mu\omega^2}{\omega^2 - p^2}\sin(pt + \psi)\right]\sin(\omega t + \varphi + \pi) + \right. \tag{42}$$
$$\left. + \frac{\mu X p}{\omega^2 - p^2}\cos(pt + \psi)\sin(\omega t + \varphi)\right\}\mathrm{e}^{-t/T}.$$

4. The Frequency Response

Let introduce the reduced parameters

$$\lambda = T\delta, \qquad m = Tp, \qquad u = T\omega, \tag{43}$$

called respectively *reduced atenuation*, *reduced modulated frequency* and *reduced frequency*. Now, using (34), the phase angles Ψ and Φ, the two ratios of output amplitude to input amplitude W_1 and W_2 (see (36)) as well as the two ratios of output degree of modulation to the input degree W_3/W_1 and W_4/W_2 (see (37)) are given by[1)]

$$\left\{\begin{aligned}
&m\tan\Psi,\ u\tan\Phi = \\
&= \frac{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u+m)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u-m)^2} - [(1+\lambda)^2 \pm (u^2 - m^2),]}{2(1+\lambda)} \\
&W_1 = \frac{(1+\lambda)\cos\Phi + u\sin\Phi}{(1+\lambda)^2 + u^2}, \qquad W_2 = \frac{(1+\lambda)\sin\Phi - u\cos\Phi}{(1+\lambda)^2 + u^2}, \\
&\frac{W_3}{W_1} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u+m)^2} + \sqrt{(1+\lambda)^2 + (u-m)^2}}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u+m)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u-m)^2}} \times \\
&\qquad \times \frac{(1+\lambda)^2 + u^2}{(1+\lambda)\cos\Phi + u\sin\Phi}, \\
&\frac{W_4}{W_2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u+m)^2} - \sqrt{(1+\lambda)^2 + (u-m)^2}}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u+m)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2 + (u-m)^2}} \times \\
&\qquad \times \frac{(1+\lambda)^2 + u^2}{(1+\lambda)\sin\Phi - u\cos\Phi}.
\end{aligned}\right. \tag{44}$$

1) Formulae (44_1) are identically with those given in [1]; there lacks the factor 2 at the denominator in [1, (33_2)].

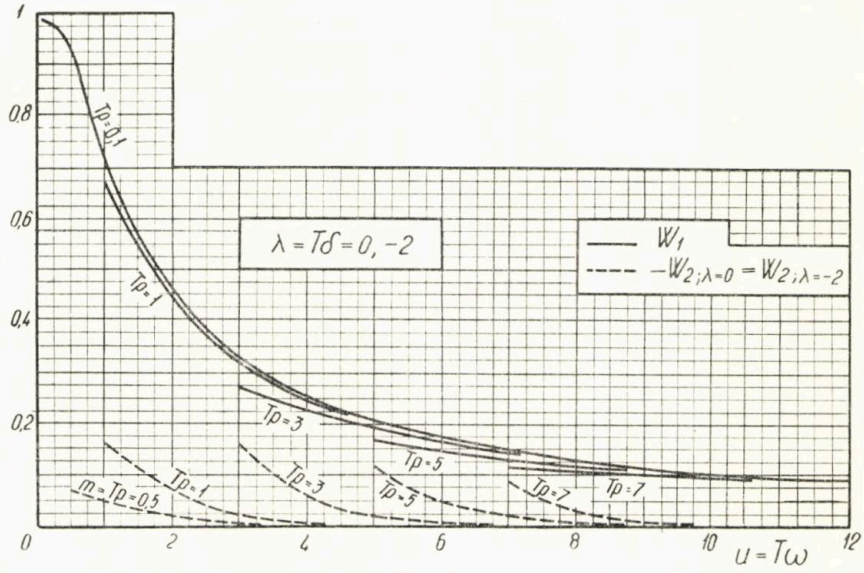

1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
$u = T\omega$
$\lambda = T\delta = 0, -2$
W_1
$-W_{2;\lambda=0} = W_{2;\lambda=-2}$
$Tp=0,1$
$Tp=1$
$Tp=3$
$Tp=5$
$Tp=7$
$m=Tp=0,5$

Fig. 1

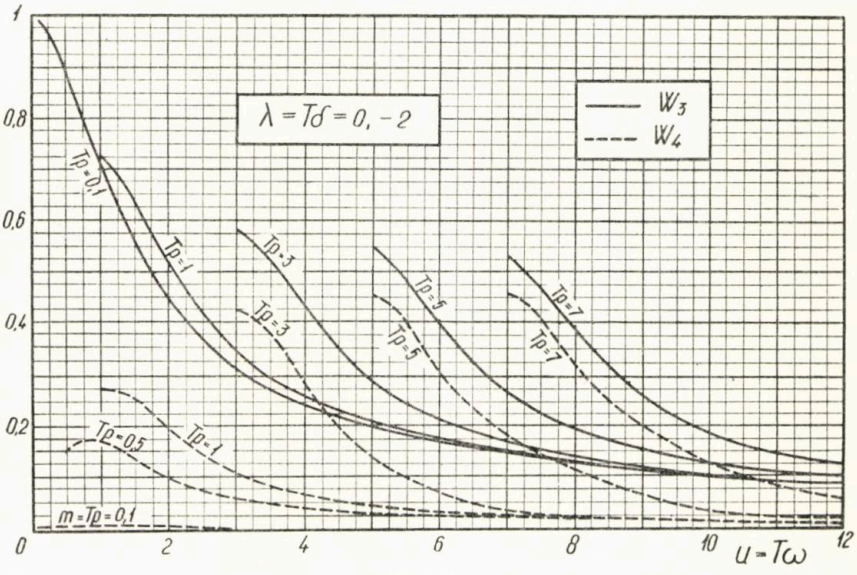

1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
$u = T\omega$
$\lambda = T\delta = 0, -2$
W_3
W_4
$Tp=0,1$
$Tp=1$
$Tp=3$
$Tp=5$
$Tp=7$
$Tp=0,5$
$m=Tp=0,1$

Fig. 2

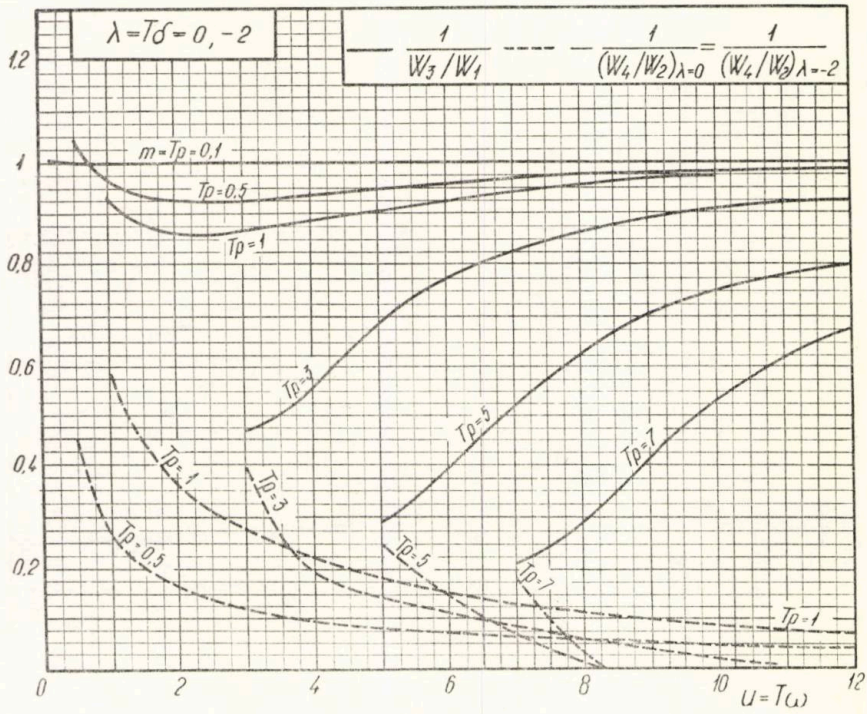

λ=Tσ=0,-2
1/(W3/W1) ---- 1/(W4/W2)λ=0 = 1/(W4/W2)λ=-2
m=Tp=0,1
Tp=0,5
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
U=Tω

Fig. 3

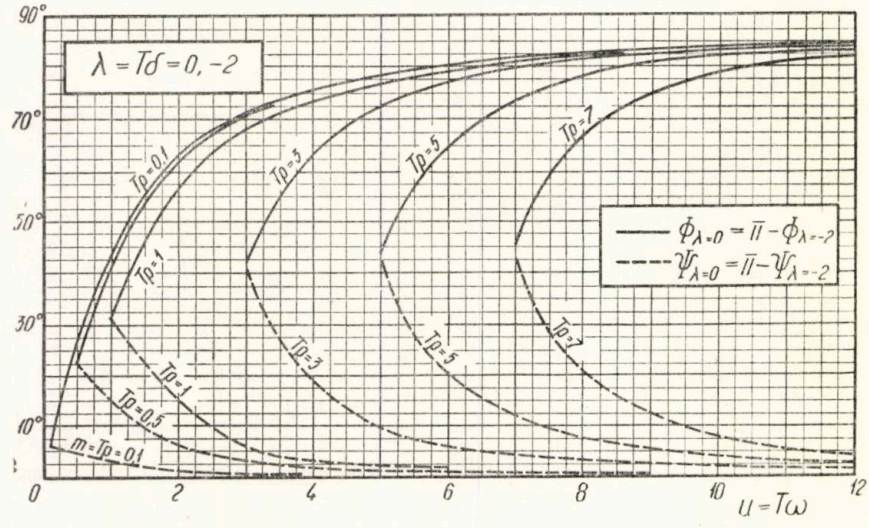

λ=Tσ=0,-2
Φλ=0 = π - Φλ=-2
Ψλ=0 = π - Ψλ=-2
90°
70°
50°
30°
10°
m=Tp=0,1
Tp=0,5
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
0
2
4
6
8
10
12
U=Tω

Fig. 4

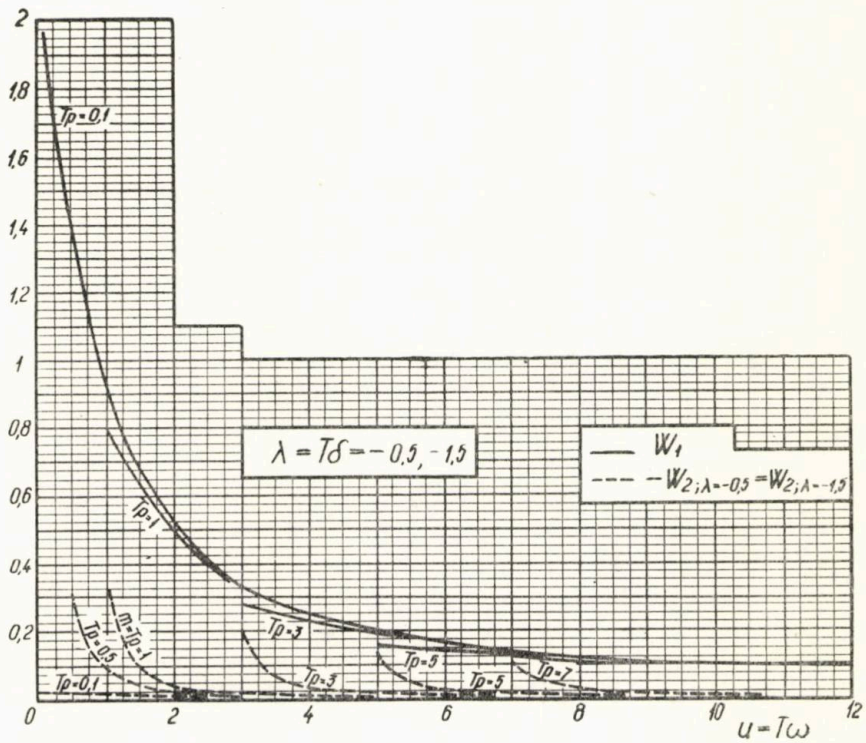

2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
u = Tω
Tp=0,1
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
Tp=0,5
m=Tp=1
λ = Tδ = −0,5, −1,5
W1
−W2;λ=−0,5 = W2;λ=−1,5

Fig. 5

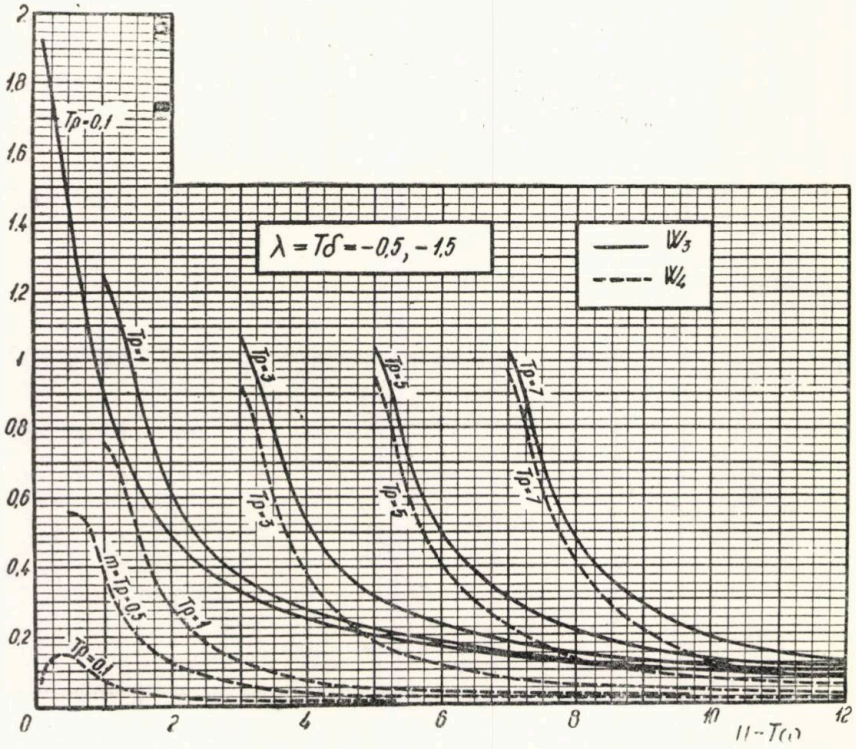

2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
λ = Tδ = -0,5, -1,5
W3
W4
Tp=0,1
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
m=Tp=0,5

Fig. 6

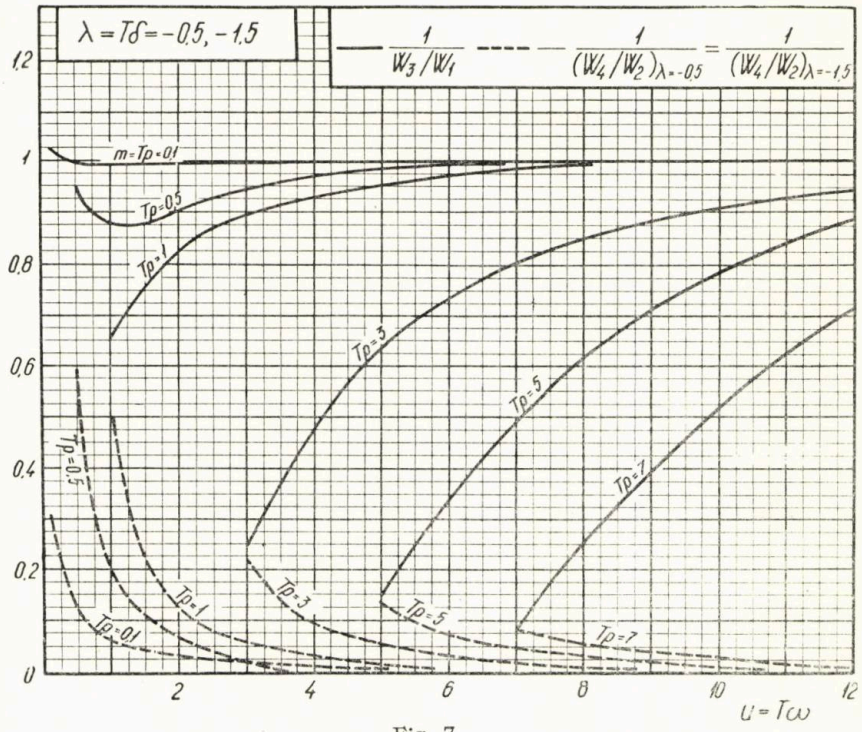

λ = Tδ = −0,5, −1,5
1/(W3/W1) ---- 1/(W4/W2)λ=−0,5 = 1/(W4/W2)λ=−1,5
m=Tp=0,1
Tp=0,5
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
U = Tω

Fig. 7

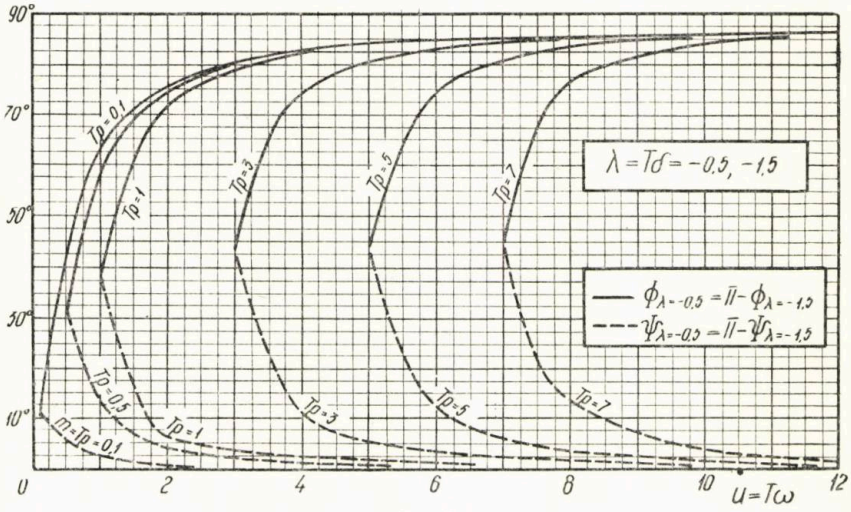

λ = Tδ = −0,5, −1,5
φλ=−0,5 = π − φλ=−1,5
ψλ=−0,5 = π − ψλ=−1,5
m=Tp=0,1
Tp=0,5
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
U = Tω

Fig. 8

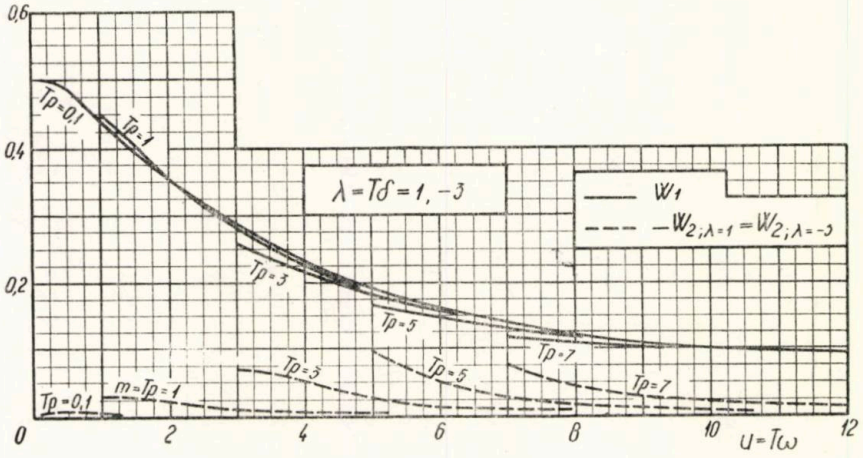

0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
U=Tω
λ=Tδ=1, -3
W1
W2;λ=1 = W2;λ=-3
Tp=0,1
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
m=Tp=1

Fig. 9

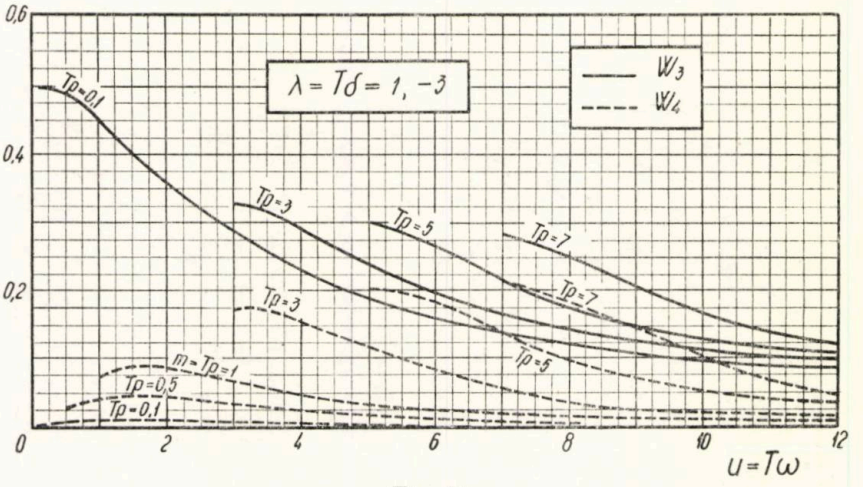

0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
U=Tω
λ=Tδ=1, -3
W3
W4
Tp=0,1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
Tp=7
Tp=3
Tp=5
m=Tp=1
Tp=0,5
Tp=0,1

Fig. 10

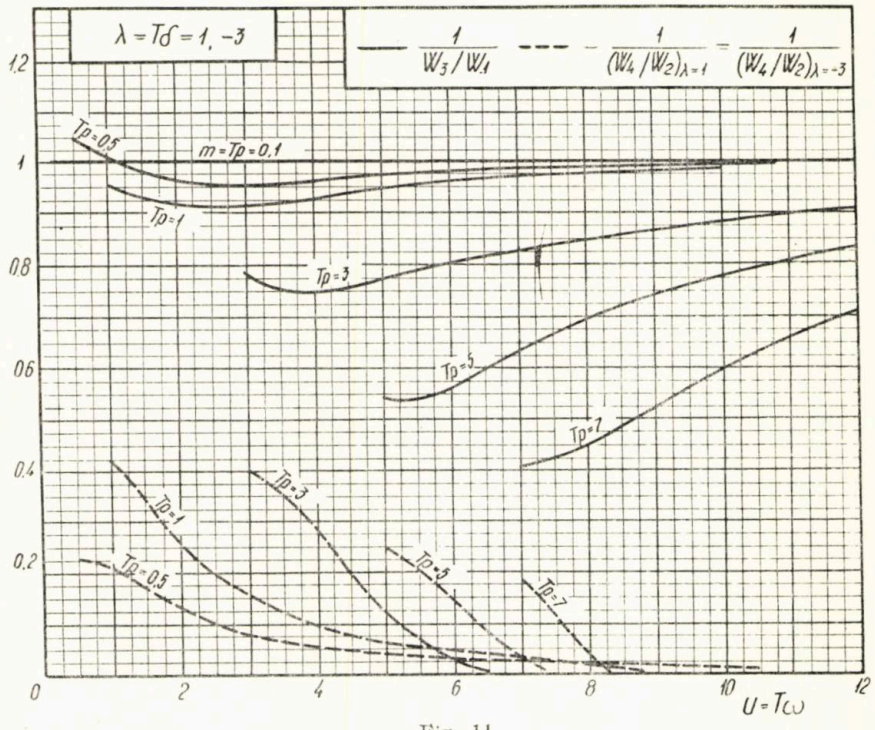

λ = Tδ = 1, −3
1/(W3/W1)
1/(W4/W2)λ=1 = 1/(W4/W2)λ=−3
Tp=0.5
m=Tp=0.1
Tp=1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
U=Tω

Fig. 11

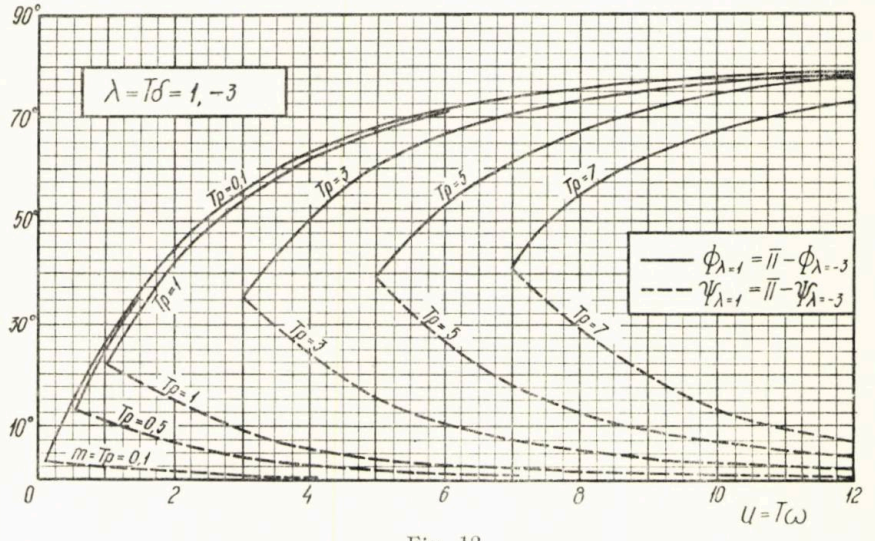

λ = Tδ = 1, −3
Tp=0.1
Tp=3
Tp=5
Tp=7
Tp=1
Tp=0.5
m=Tp=0.1
φλ=1 = π − φλ=−3
ψλ=1 = π − ψλ=−3
U=Tω

Fig. 12

The plot of Ψ, Φ, $W_1,\ldots,W_4$, $W_3/W_1\ (=\mu_1/\mu)$ and $W_4/W_2\ (=\mu_2/\mu)$ vs. u, for given λ and different values of m leads to *new amplitude and phase response curves* for a first order system, submitted to inputs (3). Some of such curves are given in Figs. 1...12.

Each curve is valid for both λ and λ' which correspond to a given value of $|1+\lambda|$. Namely $\Psi_{\lambda'}=\pi-\Psi_\lambda$, $\Phi_{\lambda'}=\pi-\Phi_\lambda$, $W_{1\lambda'}=W_{1\lambda}$, $W_{2\lambda'}=-W_{2\lambda}$, $W_{3\lambda'}=W_{3\lambda}$, $W_{4\lambda'}=W_{4\lambda}$.

For every value of m, W_1 has practicaly the same value, which approaches zero when u increases (if $u=10$, $W_1\approx 0{,}1$). The modulation degree of the main component is amplifyied if $u-m\in(0,3]$ and afterwards $W_3\approx W_1<0{,}2$. The distorsion component vanishes always more rapidly than the main one; if m increases, it acquires the character of an oscillation with only simple harmonic amplitude modulation. If $m>3$ and $u-m\in(0,\ 1{,}5]$ the main component becomes also only simple harmonic modulated, as much as $|1+\lambda|$ is smaller than 1, both components having the same order of magnitude.

The first order system can amplify the general harmonic modulated input only if $|1+\lambda|<1$, $m<0{,}5$ and u is near to m; then the output is similar to the input, having in addition the same degree of modulation.

5. Conclusion

1. The symbolic representation of a general harmonic amplitude modulated input (3) by the hypercomplex number with derivation operator (6), (4) is utilized in order to study completely the steady-state response of a first order system,

2. The steady-state response presents always distorsion, having the character of an amplitude and phase modulated oscillation (36), (27), where the quantities which occur are given by (34) and (37). The distorsion is negligible if $Tp\approx 0$.

3. New frequency response curves are drawn for a first order system, when the input signal is a general harmonic amplitude modulated oscillation. They pointed out that for large values of $T\omega$, the system strongly diminishes the signal (3), which is then practically nondistorsionated. The system can amplify, also without perceible distorsion, if $|1+T\delta|<1$, $pT<0{,}5$ and ω is near to p.

Received August 6, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs. (I) Simple Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVI (XX)**, *3–4*, s. IV, 7–14 (1970).

2. Braier A., *Frequency Response of first Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (II) *Linear Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII (XXI)**, *1—2*, s. IV, 13—18 (1971).
3. Gille J. C., Decaulne P., Pelegrin M., *Théorie et calcul des asservissements.* Dunod, Paris, 1963.
4. Braier A., *Composition of Colinear Oscillations with Amplitude Modulation.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIV (XVII)**, *1—2*, 149—156 (1968).
5. Braier A., *Algebraic Method in the Kinematics and Dynamics of Modulated Vibration.* Dynamika Strojov; Zbornik referatov VI. konferencie o dynamike strojov Bratislava—Smolenice 1970, Vol. 2, Slovenska Akadémia Vied, 1971, pp. 587—600.
6. Braier A., *The Transferance of a System.* Bul. Inst. polit. Iași, **XV (XIX)**, *3—4*, s. I, 59—68 (1969).

RĂSPUNSUL FRECVENȚIAL AL SISTEMELOR DE ORDINUL ÎNTÎI LA INTRĂRI MODULATE ÎN AMPLITUDINE

III. Intrări cu modulație armonică generală

(Rezumat)

Se utilizează reprezentarea simbolică a semnalului de intrare cu modulație armonică generală (3) prin numărul hipercomplex (element al unei algebre asociative, comutative și cu unitate, de ordinul VI, pe corpul real) și cu operatorul de derivare dați de (6), (4) pentru a studia complet regimul permanent (cu condiții inițiale nule) al unui sistem de ordinul întîi. Rezultă că această mișcare are întotdeauna un caracter distorsionat, fiind modulată atît în amplitudine cît și în fază (v. (36), (27)), în care mărimile care intervin sînt date de (34) și (37). Distorsiunea este practic neglijabilă numai dacă $Tp \approx 0$.

Se construiesc noi caracteristici de frecvență pentru sistemul de ordinul întîi supus unei intrări de tipul studiat (3), dintre care parte reprezentate în fig. 1...12. Pentru valori mari ale lui $T\omega$ sistemul slăbește puternic semnalul (13), fără a-l distorsiona în mod sensibil. Are loc amplificare a semnalului (3), de asemenea cu distorsiune neglijabilă, numai dacă $|1 + T\delta| < 1$, $pT < 0{,}5$ și ω este apropiat de p.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 539.41

ANALYSE DES PHÉNOMÈNES DE RELAXATION DANS LES MATÉRIAUX ANÉLASTIQUES

PAR

CHRISTIANE LEGRAS

1. Introduction

Le sujet de notre travail [1] est l'étude des phénomènes de relaxation des matériaux anélastiques. Cela veut dire qu'au lieu de nous intéresser aux phénomènes d'équilibre décrits par la théorie classique de l'élasticité, nous avons étudié les phénomènes transitoires où le temps intervient donc explicitement.

Nous sommes donc restés dans le domaine élastique correspondant à des petites déformations. Rappelons tout d'abord les théories de Zener [1] et de Gross [2].

1) *Loi de Hooke.* L'élasticité classique est fondée sur la loi de Hooke qui dans le cas d'un problème monodimensionnel s'écrit $\sigma = E\varepsilon$ où σ est la contrainte, ε la déformation et E un coefficient représentatif du corps, indépendant du temps.

2) *Phénomènes d'anélasticité.* Étudions certains phénomènes appelés phénomènes d'anélasticité qui ne peuvent être décrits par la loi de Hooke.

a) Phénomènes d'hysteresis: Le diagramme contrainte-déformation qui d'après la loi de Hooke devrait être rectiligne présente en réalité une courbe aller non superposable à la courbe retour. Cette courbe traduit la variation du module d'Young qui ne peut donc caractériser un matériau.

b) Phénomènes de relaxation: Si on maintient une éprouvette à déformation constante pendant un temps qui peut être très long, on remarque que la contrainte décroît jusqu'à une valeur asymptotique. On dit qu'il y a relaxation de la contrainte à déformation constante et inversement si on soumet le corps à une contrainte constante la déformation croît et tend vers une limite. Il y a relaxation de la contrainte à déformation constante ou fluage.

c) Phénomènes d'amortissement: Lorsqu'on étudie une éprouvette en vibrations forcées, on note l'apparition d'un déphasage entre la contrainte et la déformation. La tangente de cet angle définit le frottement interne, qui peut également être mis en évidence par l'amortissement des vibrations libres.

1) Thèse de 3-ème Cycle de Mathématiques Appliquées, Nancy.

3) *Théorie de Zener.* Pour étendre la loi de H o o k e, tout en restant dans le domaine linéaire, une idée naturelle était de faire intervenir les dérivées des contraintes et déformations.

Z e n e r [1] a proposé la relation

$$\sigma(t) + \tau_e \frac{d\sigma}{dt} = M_R\left(\varepsilon(t) + \tau_\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}\right),$$

qui permet de retrouver la loi de H o o k e à l'équilibre. Cette loi permet d'expliquer les relaxations exponentielles (par exemple, à déformation constante la relation précédente s'intègre en

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} = e^{-t/\tau_c}.$$

Cette loi est cependant insuffisante et Z e n e r ayant remarqué que les phénomènes d'anélasticité étaient dûs à de nombreuses causes, il a eu l'idée de représenter la relaxation totale comme la superposition finie ou infinie de phénomènes élémentaires, chacun d'eux étant représenté par une exponentielle.

Dans le cas d'une distribution continue Z e n e r a donc défini un spectre de relaxation $\bar{\Delta}(\tau)$ en posant

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} = \int_0^\infty \bar{\Delta}(\tau)\, e^{-t/\tau}\, d_\tau (\log_{10} \tau).$$

De même à contrainte constante il a défini un spectre retardé $\Delta(\tau)$ tel que

$$\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty) - \varepsilon(0)} = \int_0^\infty \Delta(\tau)(1 - e^{-t/\tau})\, d_\tau (\log_{10} \tau).$$

Ces deux équations nous donnent une écriture très générale des relaxations, mais ne permettent pas d'obtenir la loi de comportement ni d'établir les liens entre les différents phénomènes d'anélasticité.

4) *Principe de Bolzmann.* L e principe de B o l z m a n n n'utilise que la seule hypothèse de linéarité entre les petites variations de la contrainte et de la déformation. Il va nous permettre de relier la contrainte et la déformation. Pour cela il faut introduire une fonction $f(t)$ représentant la contrainte devant être appliquée à l'instant t pour maintenir la déformation constante et égale à l'unité.

Un raisonnement classique permet d'écrire

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t - t') \frac{d\varepsilon}{dt}(t')\, dt'.$$

Le même raisonnement à partir de la fonction $\delta(t)$ représentant la déformation à l'instant t résultant de l'application brusque à partir de l'instant initial d'une contrainte constante et égale à l'unité donne

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t - t') \frac{d\sigma}{dt}(t')\, dt'.$$

Il suffit donc théoriquement de connaître une des deux fonctions $f(t)$ ou $\delta(t)$ pour expliciter la loi de comportement.

5) *Théorie de Gross.* Remarquons que l'on peut décomposer la fonction $f(t)$ en deux termes : le premier $\sigma(\infty)/\varepsilon_0$ correspondant à la contrainte élastique asymptotique et le dauxième terme dû à la relaxation, que nous noterons $\overline{\Psi}(t)$ (fonction de relaxatíon) et qui peur s'écrire :

$$\overline{\Psi}(t) = \frac{\sigma(0) - \sigma(\infty)}{\varepsilon_0} \frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} .$$

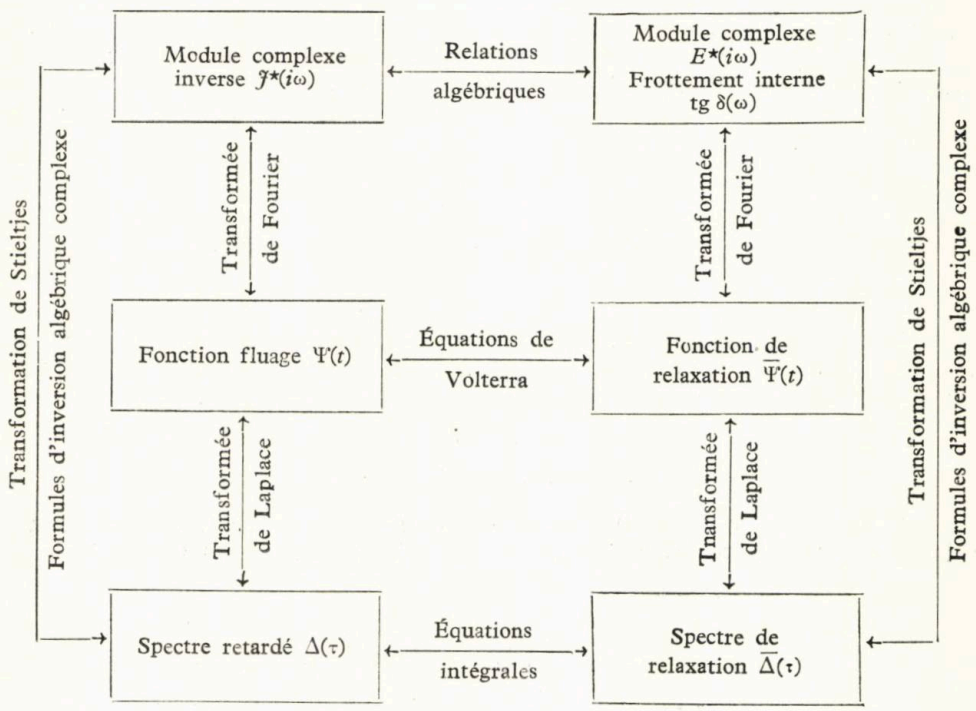
Si nous supposons l'existence d'un spectre de relaxation $\overline{\Delta}(\tau)$ nous pouvons donner une représentation intégrale de la fonction de relaxation

$$\overline{\Psi}(t) = \overline{\beta} \int_0^\infty \overline{\Delta}(\tau) e^{-t/\tau} \, d_\tau(\log_{10}\tau).$$

De même si on admet l'existence d'un spectre retardé $\Delta(\tau)$ on peut définir la fonction fluage $\Psi(t)$ en décomposant $\delta(t)$ en une déformation instantanée $\varepsilon(0)/\sigma_0$ et un terme dû au fluage $\Psi(t)$ qui peut s'écrire

$$\Psi(t) = \beta \int_0^\infty \Delta(\tau)(1 - e^{-t/\tau}) \, d_\tau(\log_{10}\tau).$$

À partir de cette écriture de $f(t)$ et $\delta(t)$ et des équations de Bolzmann, G r o s s [2] a construit une théorie mathématique permettant de relier les différents phénomènes d'anélasticité.



Les relations et équations qui interviennent sont trop complexes pour qu'on puisse en espérer une résolution mathématique stricte.

Nous avons été amenés, d'une part à préciser la représentation du spectre de relaxation par *dépouillement de résultats expérimentaux* à partir de la fonction de relaxation $\Psi(t)$, puis à l'aide de techniques numériques à retrouver à partir de ce spectre les différentes fonctions introduites par Gross en particulier le module complexe d'élasticité, le frottement interne et le spectre retardé.

Nous avons rencontré des difficultés numériques d'une part dans la résolution de systèmes d'équations non linéaires qui interviennent dans la méthode des moindres carrés et d'autre part dans le calcul d'intégrales définies où nous avons dû faire appel à des techniques originales. Tous ces calculs n'ont été rendu possibles que grâce au traitement sur ordinateur.

2. Application d'une formulation déduite des courbes de Kubat

2.1. Recherche d'une forme analytique représentant la fonction de relaxation

Notre point de départ a été les courbes expérimentales de Kubat [3] représentant la courbe de relaxation en fonction du logarithme décimal du temps pour divers matériaux avec des conditions initiales variables (en particulier sur le cadmium et l'indium).

Monsieur Guitard [4] a proposé pour la représentation des courbes réduites de relaxation la formule

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log_{10} t - m}{\xi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Nous avons vérifié sur les courbes que nous possédions la validité de cette formule et la méthode des moindres carrés nous a permis d'obtenir les 3 coefficients m, ξ et $\sigma(\infty)$ correspondants à chaque courbe.

2.2. Calcul du spectre de relaxation

Nous avons donc utilisé cette hypothèse pour calculer le spectre de relaxation dont la définition nous conduit à l'équation intégrale

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log_{10} t - m}{\xi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}(\tau) e^{-t/\tau} d_\tau (\log_{10} \tau).$$

On obtient formellement la solution stricte de cette équation à l'aide de la transformée de Mellin-Fourier sous la forme d'une intégrale que nous avons dû calculer numériquement.

Pour différentes valeurs des paramètres, nous avons tracé point par point les courbes de $\bar{\Delta}(\tau)$ correspondantes qui évoquaient les courbes Gauss. Nous avons donc été amenés à prendre comme hypothèse

$$\bar{\Delta}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\tau - m_1}{\xi_1}\right)^2\right],$$

d'où une deuxième représentation des courbes réduites de relaxation

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi_1} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\tau - m_1}{\xi_1}\right)^2\right] e^{-t/\tau}\, d_\tau(\log_{10}\tau).$$

On peut montrer que ces deux représentations d'une même courbe qui donnent toutes deux une approximation satisfaisante ne correspondent pas à une même loi stricte.

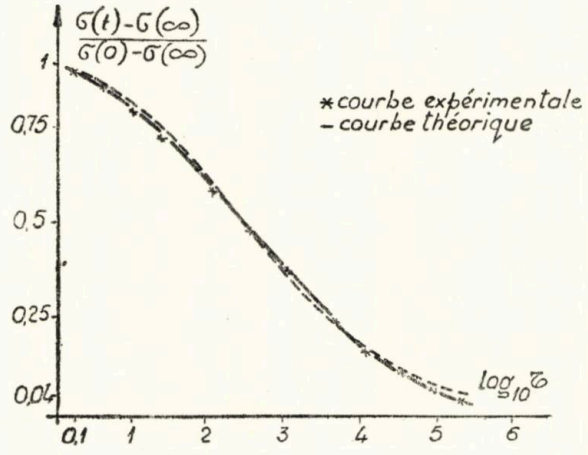


Fig. 1

Pour calculer les coefficients m_1 et ξ_1 nous n'avons pu utiliser la méthode des moindres carrés, car l'ordinateur sur lequel nous avons travaillé n'était pas assez puissant, aussi sommes-nous passés par l'intermédiare des coefficients m et ξ définis comme étant les moments centrés d'ordre 1 et 2 de la courbe réduite de relaxation en fonction du logarithme à base 10 du temps. Il existe des relations très simples entre m et m_1, ξ et ξ_1 puisque $m_1 = m + A$ et $\xi_1^2 = \xi^2 + B$ où A et B sont des constantes indépendantes des conditions initiales.

Par des artifices de calcul, nous avons donc pu approcher les coefficients m_1, ξ_1 et $\sigma(\infty)$ et nous avons vérifié sur les courbes que nous possédions que notre hypothèse d'existence d'un spectre gaussien était satisfaisante.

La fig. 1 nous montre l'approximation obtenue pour une éprouvette de cadmium.

2.3. Calcul du frottement interne

Chaque courbe de relaxation nous permet d'obtenir un groupe de 3 valeurs m, ξ et $\sigma(\infty)$ et nous pouvons alors calculer numériquement les différentes fonctions introduites par Gross, en particulier le module complexe d'élasticité et le frottement interne; la fig. 2 représente le frottement interne d'une exponentielle de cadmium en fonction du logarithme de base 10 de la fréquence. Nous passons donc d'une manière théorique d'un groupe d'epériences à déformation constante à un groupe d'expériences à déformation périodique imposée.

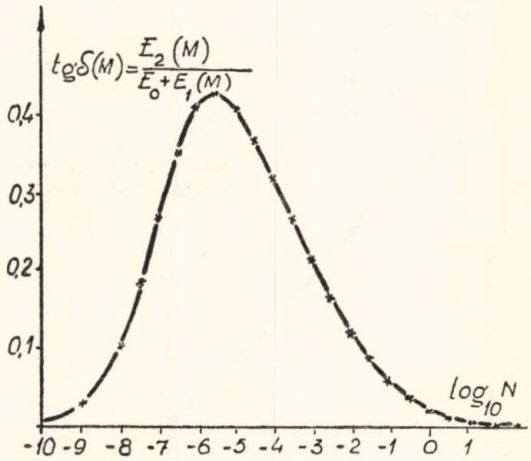


Fig. 2

À partir du spectre de relaxation, nous avons aussi calculé numériquement le spectre retardé dont nous n'avons pu obtenir une représentation mathématique simple.

3. Résultats et conclusions

Pour tester notre représentation, nous avons exploité un certain nombre de courbes de relaxation expérimentales en calculant chaque fois les 3 paramètres fondamentaux m, ξ et $\sigma(\infty)$.

Toutes les expériences correspondent au domaine élastique et certains résultats sont donnés dans le tableau 1. On obtient 2 chiffres significatifs. On constate que pour l'ensemble des corps la valeur de ξ est sensiblement constante; ξ prend une valeur moyenne de 1,75 avec une erreur relative de 10%.

Tableau 1

Corps	No éprouvette	ξ	$\sigma(\infty)/\sigma(o)$	m
Cadmium	*a(3)*	1,78	0,06	2,47
	b(3)	1,76	0,02	2,23
	c(3)	1,60	0,05	2,07
	a(4)	1,65	0,10	2,86
	b(4)	1,60	0,04	2,53
	c(4)	1,46	0,11	1,94
Indium	*d(9)*	1,70	0,02	1,92
	e(9)	1,67	−0,02	1,86
Polyethylène LCPE	*b(2a)*	1,55	0,35	1,57
Polyethylène HCPE	*b(3a)*	1,73	0,21	1,59
Molybdene	*a(3)bd*	1,46	0,70	0,66
	d(3)bd	1,71	0,62	0,51

La détermination numérique de $\sigma(\infty)/\sigma(0)$ est assez délicate et les résultats assez imprécis. On peut cependant noter que ce rapport peut prendre des valeurs considérablement différentes pour des corps distincts. Cependant pour un corps donné, les ordres de grandeur se conservent et nos calculs ne s'opposent pas à l'hypothèse dont nous verrons l'intérêt par la suite que $\sigma(\infty)/\sigma(0)$ soit un coefficient représentatif d'un corps.

La variable m dépend aussi du corps mais pour un même corps il y a encore des variations sensibles avec la vitesse de mise en déformation et la valeur de la contrainte initiale. Cette variation de m est assez notable et il faut le reconnaître assez regretable, car elle se heurte à l'hypothèse de linéarité du principe de Bolzmann qui est à la base de notre étude.

On peut en effet montrer en appliquant à la fonction $f(t)$ l'hypothèse de linéarité, que les paramètres m, ξ et $\sigma(\infty)/\sigma(0)$ doivent être pour un corps donné indépendants des conditions initiales. L'hypothèse a été vérifiée avec une précision suffisante pour ξ et $\sigma(\infty)/\sigma(0)$ mais elle l'est moins pour m.

On peut penser qu'une des causes de cette imperfection est la suivante: on sait qu'il existe plusieurs modes de relaxation provenant de causes différentes par exemple la relaxation dûe aux courants thermiques,

à la viscosité des joints de grains ou des joints de macles. On peut penser que le spectre de relaxation que nous avons choisi n'est satisfaisant que lorsque la relaxation étudiée ne met en jeu qu'une seule de ces causes. Notre représentation ne serait donc valable que pour des phénomènes où une des causes de relaxation serait prépondérante, mais devra être améliorée lorsque plusieurs causes interviendront à la fois, par exemple par superposition de plusieurs lois gaussiennes. On peut cependant espérer que la formulation que nous proposons est suffisante pour des types d'expériences assez homogènes.

Reçue le 18 juin 1968 *Université de Nancy, France*

BIBLIOGRAPHIE

1. Zener, *Élasticité et anélasticité des métaux.* Dunod.
2. Gross B., *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity.* Hermann.
3. Kubat, *Stress Relaxation in Polycristalline and Single Cristal Cadmium, Indium, Lead and Tin.*
4. Guitard, *Synthèse bibliographique sur les lois de comportement des matériaux dans le domaine de l'élasticité.* Publication interne au laboratoire de Mécanique de l'E.N.S.E.M.

ANALIZA FENOMENELOR DE RELAXARE ÎN MATERIALE ANELASTICE

(Rezumat)

Se studiază unele aspecte ale fenomenelor de relaxare în materiale anelastice, precizîndu-se pe baza datelor experimentale spectrul de relaxare precum și diferitele funcții introduse de Gross [2], în particular modulul complex de elasticitate, frecarea internă și spectrul întîrziat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.D. 531.391.3

SUR L'ANALYSE NONHARMONIQUE DE LA PERTURBATION DE L'ÉQUILIBRE STABLE D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE

PAR

GH. NIŢESCU, VIRGIL OLARIU, M. TOFAN et A. IONESCU

1. L'action d'un champ extérieur variable induit en dehors de l'énergie potentielle propre, dépendante du vecteur des coordonnées généralisées $\bar{q}\,(U(\bar{q}))$, une énergie potentielle $U_e(\bar{q}, t)$ extérieure, qui peut être représentée dans le voisinage $U(\bar{q}_0)$ de la position d'équilibre stable du système par:

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{x} = \bar{q} - \bar{q}_0, \\ U_e(x, t) \sim U_e(0, e) + \bar{x}\left[\dfrac{\partial U_e}{\partial \bar{x}}\right]_{\bar{x}=0} + \dots \end{cases}$$

Dans cette approximmation osculatrice le premier terme peut être négligé, parce que en tant que fonction de temps, il est inopérant dans le formalisme de Lagrange.

Dans le deuxième terme, la dérivée $(-\partial U_e/\partial \bar{x})$ avec changement du signe — constitue la force perturbatrice actionnant sur le système dans sa position d'équilibre:

$$\left| -\frac{\partial U_e}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = F(t).$$

2. En général, $F(t)$ c'est une fonction de temps donnée soit sous forme analytique, soit sous forme graphique ou discrète.

La solution générale des équations de mouvement réclame la connaissance de la série des solutions particulières. Étant donné que cette série est en général difficile à formuler, on recourt à la représentation en série Fourier:

$$(2)\qquad \begin{cases} F(\omega t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k\, e^{ik\omega t}, \\ C_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega\tau) e^{-ik\omega\tau}\, d(\omega\tau), \end{cases}$$

c'est-à-dire une somme de composantes harmoniques supérieures (multiples entiers de k) d'un harmonique fondamental.

Par exemple, dans le cas du vilebroquin d'un moteur à un cylindre à quatre temps, cette perturbation est provoquée d'une part par la pression des gaz du cylindre — représentée par une série Fourier qui a comme période fondamentale 4π et par conséquent la pulsation fondamentale est $\omega_{p_1}=\omega/2$, où ω est la vitesse angulaire de l'arbre moteur, et d'autre part par les composantes nonéquilibrées des pièces en mouvement de translation, ayant comme pulsation fondamentale la vitesse angulaire de l'arbre moteur $\omega_{i1}=\omega$.

Il est évident que, par la composition de N moments perturbateurs[1]) décalés aux angles $4\pi/N$ respectivement $2\pi/N$, le moment perturbateur résultant aura comme pulsation fondamentale la plus petite de ces deux pulsations :

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega_{fN} = \min(\omega_{pN},\ \omega_{iN}), \\ \quad = \min\left(\dfrac{\omega}{2N},\ \dfrac{\omega}{N}\right) = \dfrac{\omega}{2N}. \end{cases}$$

3. Une représentation des équations différentielles de mouvement dans les coordonnées $\bar{Q}_i$ $(i=1, 2,...)$ normales, découple le système linéaire entier, tant du point de vue de l'inertie que de l'élasticité, de sorte que nous avons des équations indépendantes:

$$(4)\qquad \ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = F_i(\omega t), \qquad (i=1,\ w).$$

L'étude du système (4) dans le voisinage de l'état de résonance comporterait la connaisance exacte de la composante de la perturbation de pulsation, égale avec celle du système élastique, ω_i.

Lorsque ω_i n'est pas un multiple entier de la pulsation fondamentale ω_{fN}, la série Fourier — développée dans l'espace orthogonal et complet des fonctions trigonométriques à multiples entiers de l'argument ωt — ne contient pas une telle composante.

4. Pour l'analyse nonharmonique nous proposons une approximation oscillatoire de la perturbation $F(\omega t)$, à l'aide d'une série sous la forme:

$$(5)\qquad F(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\lambda_k \omega t),$$

où les facteurs de multiplication λ_k de la pulsation fondamentale sont réels. Dans ce cas, on considère l'intervalle de périodicité de la fonction quelconque $\omega\tau$:

$$\omega\tau \in [0,\ \pi].$$

Si nous considérons la suite de valeurs $F_i(\omega\tau_i)$ que prend la fonction $F(\omega t)$ dans l'intervalle $[0,\ \pi]$, tout en suivant la suite des approximations oscillatoires construite de sommes finies:

---

[1]) On suppose en général que le moment résistant est constant et, par conséquent, indépendant de ω.

$$\begin{cases} S_1(\omega t)=B_1 \sin(\lambda_1 \omega t), \\ S_n(\omega t)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\lambda_k \omega t), \end{cases} \tag{6}$$

alors, pour introduire un critère de *meilleure approximation osculatrice* à un niveau n, il sera très utile d'examiner la suite des écarts:

$$\bar{\varepsilon}_n=(F(\omega\tau_i)-S_n(\omega\tau_i)), \tag{7}$$

qui peut être considérée comme un vecteur m-dimensionnel, où m représente le nombre des observations. On peut introduire une mesure de ces vecteurs au moyen du produit scalaire (norme sphérique), en obtenant ainsi un critère de *meilleur choix des coefficients* B_k, $(k=1, n)$, par la minimisation de l'écart moyen carré:

$$M_n=\frac{1}{m}(\bar{\varepsilon}_n\cdot\bar{\varepsilon}_n)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[F(\omega\tau_i)-S_n(\omega\tau_i)]^2. \tag{8}$$

Dans le cas où la fonction est intégrable dans l'intervalle $[0, \pi]$, alors (8) prend la forme:

$$M_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon_n^2\,\mathrm{d}(\omega\tau). \tag{9}$$

Le minimum de l'écart moyen carré est réalisé en même temps que la vérification du système

$$\frac{\partial M_n}{\partial B_k}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(F(\omega\tau)-S_n(\omega\tau))\sin(\lambda_n\omega\tau)\mathrm{d}(\omega\tau)=0, \tag{10}$$

$$(k=1,\ldots,n).$$

La matrice des coefficients des inconnues B_k se diagonalise en même temps qu'a lieu l'orthogonalisation de la base $\sin\lambda_k\omega t$, de sorte que pour

$$I_0=\int_0^{\pi}\sin(\lambda_k\omega\tau)\sin(\lambda_j\omega\tau)\mathrm{d}(\omega\tau)=0, \qquad (k\neq j), \tag{11}$$

nous aurons immédiatement les solutiones définitives:

$$B_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(\omega\tau)\sin(\lambda_k\omega\tau)}{1-[\sin(2\lambda_k\pi)]/(2\lambda_k\pi)}\mathrm{d}(\omega\tau). \tag{12}$$

La signification du caractère définitif est contenue dans la récurrence (6), où le terme général de la suite prend la forme:

$$S_n = S_{n-1} + B_n \sin(\lambda_n \omega t), \tag{13}$$

ce qui s'exprime par l'indépendance du coefficient B_k de n, propriété qui est réalisée par l'orthogonalisation (11).

Enfin, pour définir les valeurs λ_k qui satisfont la condition (11), nous allons considérer les fonctions

$$\varphi_k = \sin(\lambda_k \omega\tau), \quad \varphi_j = \sin(\lambda_j \omega\tau), \tag{14}$$

en tant que solutions des équations linéaires

$$\begin{cases} u_k = \ddot{\varphi}_k + (\lambda_k\omega)^2 \varphi_k = 0, \\ u_j = \ddot{\varphi}_j + (\lambda_j\omega)^2 \varphi_j = 0, \end{cases} \tag{15}$$

de sorte qu'à partir de $u_k\varphi_j - u_j\varphi_k$ il résulte:

$$\varphi_j \ddot{\varphi}_k - \varphi_k \ddot{\varphi}_j = -\varphi_k \varphi_j (\lambda_k^2 - \lambda_j^2)\omega^2. \tag{16}$$

En tenant compte du caractère différentiel de la forme (16) on obtient pour (11):

$$-(\lambda_k^2 - \lambda_j^2) \int_0^{\bar{u}} \varphi_k \varphi_j \, \mathrm{d}(\omega\tau) = \dot{\varphi}_j \varphi_k - \varphi_k \dot{\varphi}_j \Big|_0^{\pi},$$

qui avec (14) devient:

$$I_0 = \frac{\lambda_j \lambda_k}{\lambda_j^2 - \lambda_k^2} \cos(\lambda_k \pi) \cos(\lambda_j \pi) \left[\frac{\operatorname{tg}(\lambda_k \pi)}{\lambda_k} - \frac{\operatorname{tg}(\lambda_j \pi)}{\lambda_j} \right]. \tag{17}$$

Il résulte, par conséquent, que l'orthogonalité des fonctions φ_k, φ_j se réalise en même temps avec la condition que les réels λ_k vérifient l'équation transcendente

$$\operatorname{tg}(\lambda_k \pi) = a\lambda_k, \tag{18}$$

où a est une constante arbitraire.

Pour $a = 0$, on retrouve les coefficients de la série Fourier pour une fonction impaire.

5. Pour effectuer, au calculateur, les intégrales de (12) sous la forme

$$B_k = \frac{1}{N+1} \sum_0^N \sin\left(\lambda_k \frac{i\pi}{N+1}\right) F_i, \tag{19}$$

on a utilisé la récurrence [2]:

$$
(20)\quad
\begin{cases}
C = \cos\left(\lambda_k \dfrac{\pi}{N+1}\right), \qquad S = \sin\left(\lambda_k \dfrac{\pi}{N+1}\right), \\
u_2 = 0, \qquad u_1 = 0, \\
u_0 = F\left(\dfrac{i\pi}{N+1}\right) + 2Cu_1 - u_2, \\
u_2 = u_1, \qquad u_1 = u_0, \\
(i = N,\ N-1,\ldots,1), \\
B_k = \dfrac{1}{N+1} Su_1 \Big/ \left(1 + \dfrac{2SC}{\lambda_k \pi}\right).
\end{cases}
$$

En conclusion, la représentation de la fonction de perturbation d'un système mécanique, dans son état d'équilibre stable, peut être réalisée par l'approximation osculatrice par rapport au deséquilibre $\bar{x} = \bar{q} - \bar{q}_0$, caractérisé par une fonction de pondération $\delta(\bar{x}/0)$ Dirac, — pour laquelle la meilleure approximation se réalise donc à $\bar{x} = 0$, même que par l'approximation oscillatoire nonharmonique par rapport au temps, en mettant en évidence la valeur de la composante dans la direction de la valeur propre $\omega_i = \lambda_r \omega_f$.

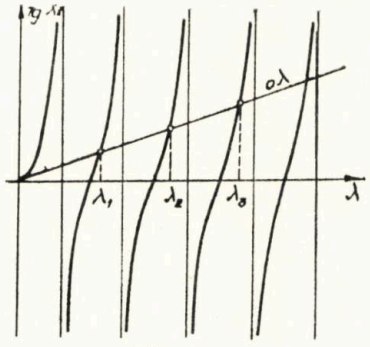


Fig. 1

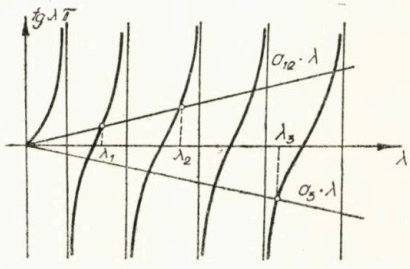


Fig. 2

Lorsque toutes les pulsations propres ω_i d'un système à w degrés de liberté peuvent être représentées par

$$\omega_i = \lambda_{ri} \omega_f,$$

où λ_{ri} sont les solutions de l'équation (18) pour la même constante a, nous aurons un couplage complet de la résonance des degrés de liberté. Cette situation est présentée dans la fig. 1, pour $w = 3$, par des points spectraux colinéaires.

Cet état de couplage complet définit la vitesse angulaire critique Ω, avec la propriété que la suite

$$\frac{\omega_1}{\Omega}, \quad \frac{\omega_2}{\Omega}, \ldots, \frac{\omega_w}{\Omega}$$

satitfasse l'équation (18) au même paramètre a.

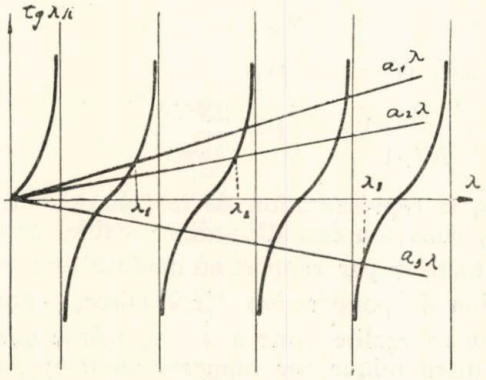


Fig. 3

Pour d'autres régimes ω, la résonance est découplée d'une façon partielle (fig. 2), ou totale (fig. 3).

Reçue le 14 avril 1971

Institut Polytechnique, Brașov

BIBLIOGRAPHIE

1. Sommerfeld A., *Partielle Differentialgleichungen der Physik.* Leipzig, 1962
2. Ralston A., Wilf H. S., *Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques.* Dunod, Paris, 1965.
3. * * * *IBM Application Program* — System 360. Scientific subroutine package (360-A-CM) Version III, 1969.
4. Landau L. D., Lifșiț E. M., *Mecanică.* Ed. tehn., Buc., 1966 (trad. du russe).

ASUPRA ANALIZEI NEARMONICE A PERTURBĂRII ECHILIBRULUI STABIL AL UNUI SISTEM MECANIC

(Rezumat)

Se propune o aproximare oscilatorie a perturbației aplicată sistemului, care utilizează o serie de forma (5), unde factorii de multiplicare a pulsației fundamentale sînt reali. Se stabilește un criteriu pentru cea mai bună alegere a coeficienților ce intervin în (5), care conduce la formulele (12), ce se pretează la calculul cu ajutorul mașinilor cifrice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 531.36

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER STABILITÄTSBEDINGUNGEN DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN EINES STOSSSCHWINGERS MIT EINEM FREIHEITSGRAD

VON

LIVIU BRÎNDEU

1. Vorwort

Stossschwinger sind grundsätzlich nichtlineare Verbände [1]. Die charakteristischen Eigenschaften solcher Verbände machen die Anwendung der allgemeinen Methoden der nichtlinearen Schwingungeslehre unmöglich. Deshalb wurden bis jetzt hauptsächlich nur solche Stossschwinger untersucht, für welche die Bewegungsgleichung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen linear ist und für welche somit die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung bekannt ist.

Das Studium verschiedener Stossschwing-Verbände welche von A. E. Kobrinski [2], L. V. Bespalova [3] etc. durchgeführt wurden, führte anf eine Methode zur Bestimmung der Stabilitätsbedingungen welche der Perturbationsmethode analog ist.

Aus den Bewegungsgesetzen werden die linearisierten Rekurenzgleichungen in den Perturbationen der Bewegungsparameter, welche für zwei aufeinanderfolgenden Stössen entsprechen, abgeleitet und die Stabilitätsbedingungen bestimmt.

In diesem Beitrag wird eine neue und originelle Methode zur Bestimmung der Stabilitätsbedingungen vorgestellt, welche für die allgemeinste Stossschwing-Verbände angewendet werden kann. Diese Methode ist in der Arbeit [4] enthalten mit welchen ich unter der Leitung von Prof. Gh. Silaş zum Doktor-ingenieur promovierte.

Der Verteil der direkten Methode besteht in der Vereinfachung der Rechenarbeit für die Bestimmung der in den Perturbationen linearisierten Gleichungen.

2. Die Beschreibung der möglichen Bewegungen eines Stossschwingsystems

Es wird ein Verband mit einer nichtlinearen Kennlinie betrachtet mit der Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{q} + \varphi(\dot{q}, q, t) = 0. \tag{1}$$

Die Funktion $\varphi(\dot{q}, q, t)$ ist in t-periodisch mit der Periode T. Die Bewegung des nichtlinearen Verbandes alterniert mit Stössen, da die Existenz eines Stosspaares vorausgesetzt wird. Dem Stosspaar entspricht die einseitige Bindung

$$f(q) = q - q_0 \geqslant 0, \tag{2}$$

q_0 ist ein bekannter Wert.

Die Position des Verbandes zum Zeitpunkt des Stosses ist durch die Legekoordinate q_0 bestimmt, welche die Gleichheit (2) erfüllt. In diese Position gelangt der Verband zu den Zeitpunkten $t = t_k$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Wenn man die Form der einseitigen Bindung (2) berücksichtigt, so müssen die Geschwindigkeiten am Ende und am Anfang des k-ten Stosses folgende Bedingungen erfüllen

$$\dot{q}_k' = -R\dot{q}_k, \quad (0 \leqslant R \leqslant 1) \tag{3}$$

und $\dot{q}_k < 0$ [4], [5].

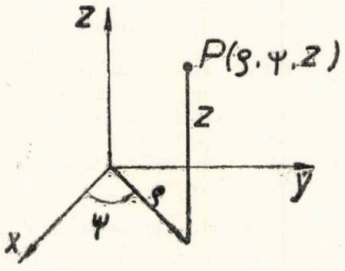


Abb. 1

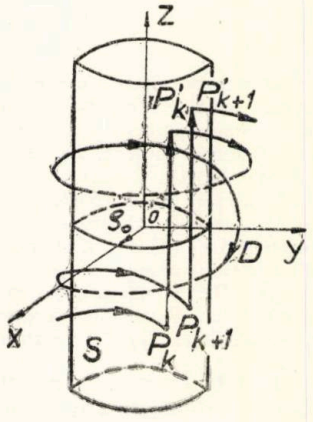


Abb. 2

Da es sich um heteronome Bewegungen handelt, können diese anschaulicher im Phasenraum [3] mit Hilfe von Zylinderkoordinaten $\rho = \rho_0 + q - q_0$, $\psi = t$ und $z = \dot{q}$ (Abb. 1) dergestellt werden. In dieser Derstellung entspricht für $q = q_0$ eine Zylinderfläche S mit dem Halbmesser $\rho = \rho_0$ und der Bereich D der möglichen Bewegungen $q > q_0$ befindet sich ausserhalb dieses Zylinders $(\rho > \rho_0)$.

Der Phasenpunkt P (Abb. 2) bewegt sich im Bereiche D, gelangt auf die Zylinderfläche S im Punkte $P_k(t_k, \dot{q}_k)$ und bewegt sich dann entlang einer Erzeugenden bis zum Punkte $P_k'(t_k, \dot{q}_k')$.

Der Geradenabschnit $P_k P_k'$ stellt den k-ten Stoss dar. Dann bewegt sich der Phasenpunkt wieder im Bereiche D bis er im Punkte $P_{k+1}(t_{k+1}, \dot{q}_{k+1})$ auf die Zylinderfläche S gelangt, wenn der $k+1$-te Stoss beginnt.

Die beschriebenen Phasenkurven stellen eine Punkttransformation der Zylinderoberfläche $\rho = \rho_0$ in sich selbst dar. Diese Punkttransformation erhält man aus der Bewegungsgleichung $q = q(t)$, welche die Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (1) ist.

Der periodischen Bewegung des Verbandes entspricht eine geschlossene Phasenkurve. Es wird der häufig vorkommende Fall betrachtet, wenn in einer Periode der Bewegung ein einziger Stoss stattfindet. Dann wird der Phasenpunkt bei einer periodischen Bewegung eine gewisse Anzahl von vollständigen Drehungen beschreiben. Der Punkt P_{k+1} fällt mit dem Punkt P_k zusammen und bestimmt somit den Fixpunkt der Transformation.

Periodische Bewegungen des Verbandes sind nur dann möglich, wenn in jeder Periode der Bewegung, welche dem Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen entspricht, die Bewegungsdifferentialgleichungen und die Anfangsgeschwindigkeiten gleich sind. Deshalb ist es notwendig, dass der Zeitabschnitt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen ein Vielfaches der Periode T der Funktion φ ist, dass also $t_{k+1} - t_k = rT$, $(r = 1, 2, \ldots)$.

Von den möglichen Bewegungen des Stossschwingers wird zuerst die periodische Bewegung mit der Periode rT bestimmt. Die Gleichung der periodischen Bewegung $\bar{q} = \bar{q}(t)$ ist die Lösung der Differentialgleichung (1) für die Anfangsbedingungen

$$\bar{q}(t_k) = q_0, \quad \dot{\bar{q}}(t_k) = \dot{q}_c' = -R\dot{q}_c. \tag{4}$$

Aus den Bedingungen für das Ende des Intervalls

$$\bar{q}(t_{k+1}) = q_0, \quad \dot{\bar{q}}(t_{k+1}) = \dot{q}_c, \tag{5}$$

folgen die Gleichungen zur Bestimmung der Parameter der periodischen Bewegung $\dot{q}_c$ und t_k, $(k = 1, 2, \ldots)$, welche den Fixpunkt der Transformation bestimmen.

3. Die Gleichung in den Variationen

Die gestörten Bewegungen des Verbandes unterscheiden sich von der periodischen Bewegung und man erhält diese, indem man annimmt, dass bei einem bestimmten Stoss die Parameter der Bewegung andere Werte besitzen als jene, welche der periodischen Bewegung entsprechen. Deshalb sind auch die Bewegungsdifferentialgleichung in den folgenden Zeitabschnitten der aufeinanderfolgenden Stösse gestört.

Um die Gleichungen in den Variationen zu Bestimmen, welche in jedem Zeitabschnitt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen gültig sind, wird eine Lösung der Gleichung (1) betrachtet, welche sich durch die Variation x von der periodischen Bewegung unterscheidet

$$q = \bar{q} + x. \tag{6}$$

Führt man diese Transformation in der Gleichung (1) aus, so erhält man die Gleichung in den Variationen

$$\ddot{x} + \varphi(q + x,\ \dot{\bar{q}} + \dot{x}, t) - \varphi(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = 0. \tag{7}$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen wird $\varphi(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ mit $\bar{\varphi}$ bezeichnet. Wenn man voraussetzt, dass die Funktion φ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, so ist es möglich die Gleichung in den Variationen (7) wie folgt zu schreiben

$$\ddot{x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{\bar{q}}} \dot{x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{q}} x + \Phi(\dot{x}, x, t) = 0. \tag{8}$$

Hier wurden mit $\Phi(\dot{x}, x, t)$ jene Glieder der Potenzreihe bezeichnet, welche $\dot{x}$ und x mit den Potenzen höher als Eins enthalten.

4. Die Stabilität der periodischen Bewegungen der Stossschwinger in erster Näherung

Die existenz von kleinen Anfangsstörungen bei den Parametern der periodischen Bewegung ist die Ursache des Auftretens einer gestörten Bewegung, welche sich von der periodischen Bewegung unterscheidet. Wen man zeigen kann, dass bei einem folgendem Stoss die als klein angenommenen Störungen kleiner werden und asymptotisch Null zustreben, so ist die periodische Bewegung asymptotisch stabil.

Zum Stabilitätsstudium muss also die Gleichung (8) benützt werden, in welcher die Variationen $\dot{x}$ und x als klein angenommen werden. Man kann aber beweisen, dass sich bei einer kleinen Änderung der Differentialgleichung (8) die Lösungen in einem endlichen Zeitintervall beliebig wenig verändern. Weil aber das letzte Glied der Gleichung (8) im Vergleich zu den anderen Gliedern sehr klein ist, kann man die Lösung im endlichen Zeitintervall rT zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen als identisch mit der Lösung der linearisierten Gleichung in den Störungen

$$\ddot{x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{\bar{q}}} \dot{x} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{q}} x = 0 \tag{9}$$

annehmen.

Diese Differentialgleichung ist linear, die Koeffizienten sind periodische Funktionen der Zeit, mit der Periode rT oder in Sonderfällen konstante Werte.

Die Lösung der Differentialgleichung (9) wird zur Bestimmung der Rekurenzbeziehungen zwischen den Störungen zweier aufeinanderfolgenden Stösse benützt.

Für die gestörte Bewegung findet der k-te Stoss zum Zeitpunkt $t_k + \Delta t_k$ statt. Die Geschwindigkeit vor dem Stoss ist $\dot{q}_c + \Delta\dot{q}_k$ und nach dem Stoss $\dot{q}'_c + \Delta\dot{q}'_k$ mit $\Delta\dot{q}'_k = -R\Delta\dot{q}_k$. Die Anfangsbedingungen sind folglich

$$q(t_k + \Delta t_k) = q_0, \quad \dot{q}(t_k + \Delta t_k) = \dot{q}'_c + \Delta\dot{q}'_k \tag{10}$$

und die Endbedingungen

$$q(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) = q_0, \quad \dot{q}(t_{k+1} + \Delta t_{k+1}) = \dot{q}_c + \Delta\dot{q}_{k+1}. \tag{11}$$

Nimmt man die Form (6) der Bewegungsgleichung der gestörten Bewegung in Betracht und beachtet man, dass die Variationen $\dot{x}$ und x von derselben Grössenordnung sind wie die Störungen, so folgt aus den Anfangsbedingungen

$$x(t_k) = -\dot{q}'_c \Delta t_k, \quad \dot{x}(t_k) = \Delta\dot{q}'_k - \ddot{q}'_c \Delta t_k \tag{12}$$

und aus den Endbedingungen

$$x(t_{k+1}) = -\dot{q}_c \Delta t_{k+1}, \quad \dot{x}(t_{k+1}) = \Delta\dot{q}_{k+1} - \ddot{q}_c \Delta t_{k+1}. \tag{13}$$

Die Werte $\ddot{q}_c$ und $\ddot{q}'_c$ können aus der Differentialgleichung (1) bestimmt werden.

Die in den Perturbationen linearisierten Rekurenzgleichungen kann man direkt erhalten, ohne die Differentialgleichung (1) zu integrieren. Man bestimmt zuerst die Lösung der Gleichung in den Variationen (9) für die Anfangsbedingungen (12) un nacher mit Hilfe der Endbedingungen (13) erhält man die Differenzgleichungen in den Perturbationen, welche zum Schreiben der Stabilitätsbedingungen notwendig sind.

5. Stossschwingverband mit periodischer nichtharmonischer Erregung

Der Vorteil, welchen die Anwendung der direkten Methode bietet, ist offensichtlich wenn die Stabilität der periodischen Bewegungen von Verbänden mit periodischer nichtharmonischer Erregung untersucht wird.

Im Folgenden wird ein linearer Verband mit einem Freiheitsgrad betrachtet mit der Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = Q(t). \tag{14}$$

Hier sind m, c, k, konstante Werte und $Q(t)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode T. Der Verband ist auch einer einseitigen Bindung (2) unterworfen

Das Stabilitätsstudium wird mit Hilfe der Gleichung in den Variationen

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{15}$$

durchgeführt.

Die Form der allgemeinen Lösung hängt vom Verhältnis zwischen den konstanten Werten c und $c_{cr} = 2\sqrt{mk}$ ab. Für den bei Stossschwingern am häufigsten auftretenden Fall, wenn $c < c_{cr}$, hat die allgemeine Lösung die Form

$$x = e^{-\frac{c}{2m}rT}[X_1 \cos p(t-t_k) + X_2 \sin p(t-t_k)]. \tag{16}$$

Hier sind $p = \omega_n\sqrt{1-(c/c_{cr})^2}$, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ und X_1, X_2 sind Integrationskonstante, welche mit den Anfangsbedingungen (12) bestimmt werden. Man erhält:

$$X_1 = R\dot{q}_c\Delta_k, \quad X_2 = \frac{1}{p}\left[-R\Delta\dot{q}_k + \left(\frac{cR}{2m}\dot{q}_c - \ddot{q}_c\right)\Delta t_k\right].$$

Wenn man auch die Endbedingungen (13) berücksichtigt, so erhält man aus der Lösung (16) die in den Perturbationen linearisierten Gleichungen:

$$\begin{cases} Re^{-\frac{c}{2m}rT}\Delta\dot{q}_k \sin(prT) = p\dot{q}_c\Delta t_{k+1} + e^{-\frac{c}{2m}rT}\left[\left(\frac{cR}{2m}\dot{q}_c - \ddot{q}_c\right)\sin(prT) + \right. \\ \qquad \left. + pR\dot{q}_c\cos(pRT)\right]\Delta t_k, \\ \Delta\dot{q}_{k+1} + Re^{-\frac{c}{2m}rT}\Delta\dot{q}_k\cos(prT) = \left(\ddot{q}_c + \frac{c}{2m}\dot{q}_c\right)\Delta t_{k+1} + \\ \qquad + e^{-\frac{c}{2m}rT}\left[\left(\frac{cR}{2m}\dot{q}_c - \ddot{q}_c\right)\cos(prT) - pR\dot{q}_c\sin(prT)\right]\Delta t_k. \end{cases} \tag{17}$$

Die Lösungen dieses Differenzengleichungssystems werden in der Form $\Delta\dot{q}_k = v\beta^k$, $\Delta t_k = \theta\beta^k$ angenommen. Aus der Bedingung, dass das lineare und homogene Gleichungssystem in den Unbekannten v und θ von Null verschiedene Lösungen besitzt, folgt die charakteristische Gleichung in β:

$$\beta^2 + \left[2R\cos(prT) - \frac{\ddot{q}_c + R\ddot{q}_c}{pq_c}\sin(prT)\right] e^{-\frac{c}{2m}rT}\beta + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT} = 0. \tag{18}$$

Die Bewegung ist stabil, wenn die Lösungen dieser Gleichung im absoluten Wert kleiner sind als Eins. Mit dem Schur'schen Kriterium [2] werden die Stabilitätsbedingungen bestimmt. Eine der Bedingungen $R < e^{\frac{c}{2m}rT}$ ist für gedämpfte Verbände ($c \neq 0$) immer erfüllt. Es folgt, dass die Stabilitätsbedingungen der periodischen Bewegungen im Falle $c < c_{cr}$ aus den Ungleichheiten

$$-\left(1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}\right) < 2R\cos(prT) - \frac{(1+R)[Q(t_k) - kq_0]}{mpq_c}\sin(prT) < 1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT} \tag{19}$$

zu bestimmen sind. Die Werte q_c und $Q(t_k)$ sind aus dem Studium der periodischen Bewegung zu berechnen.

Ähnliche Ergebnisse erhält man auch beim Studium der Fälle $c \geqslant c_{cr}$. Eine der Bedingungen ist immer, sowie im ersten Fall, $R < e^{\frac{c}{2m}rT}$.

Wenn $c = c_{cr}$ so gelten an Stelle der Ungleichheiten (19) die Bedingungen

$$-\left(1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}\right) < 2R - \frac{rT}{mq_c}(1+R)[Q(t_k) - kq_0] < 1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT} \tag{19'}$$

und für $c > c_{cr}$ die Bedingungen

$$-\left(1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}\right) < 2R\,\mathrm{ch}(prT) - \frac{(1+R)[Q(t_k) - kq_0]}{mpq_c}\,\mathrm{sh}(prT) < 1 + R^2 e^{-\frac{c}{m}rT}. \tag{19''}$$

Diese Ungleichheiten erhält man einfach, indem man in die Bedingungen (19) p gleich Null setzt, beziehungsweise durch ip ersetzt ($i = \sqrt{-1}$).

Ausserdem ist zu bemerken, dass ein besonderes Studium der Stabilität im Resonanzfall nicht nötig ist. In diesem Fall gilt $c = 0$, $\omega = \omega_n$, $c_{cr} > 0$ und somit $c < c_{cr}$. Das bedeutet dass die Bedingungen (19) gelten.

Eingegangen am 3. November 1970

Technische Hochschule, Temeschwar,
Lehrstul von theoretische Mechanik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Беспалова Л. В., Неимарк Ю. И., Феигин М. И., *Динамические системы с ударными взаимодействиями и теория нелинеиных колебании.* Инженерныи журнал. Механика твердого тела, *1* (1966).
2. Кобринскн А. Е., *Механизмы с упругими связами.* Изд. „Наука", М., 1964.
3. Беспалова Л. В., *К теории виброударного механизма.* Изв. АН. СССР, ОТН, *5* (1957).
4. Brîndeu L., *Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante.* Rezumatul tezei de doctorat, Inst. polit. Timişoara, 1970.
5. Silaş Gh., Brîndeu L., *Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen.* VDI Berichte, *135* (1969).

ASUPRA DETERMINĂRII CONDIŢIILOR DE STABILITATE ALE MIŞCĂRILOR PERIODICE ÎN CAZUL SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE CU UN GRAD DE LIBERTATE

(Rezumat)

Se prezintă o nouă metodă de determinare a condiţiilor de stabilitate aplicabilă celor mai generale sisteme vibropercutante. Pentru aceasta, ca şi în cazul sistemelor neliniare, se foloseşte ecuaţia în variaţii (9) obţinută direct din ecuaţia diferenţială a mişcării (1).

De asemenea se stabilesc relaţiile de legătură dintre condiţiile iniţiale (12), respectiv finale (13) de pe fiecare interval, şi perturbaţiile mişcării periodice din momentele ciocnirilor. După integrarea ecuaţiei în variaţii (9) şi folosirea acestor condiţii, se obţin ecuaţiile liniarizate de recurenţă în perturbaţii necesare scrierii condiţiilor de stabilitate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 531. 39

SUS LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE DONT LA MASSE EST VARIABLE

PAR

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC et AURORA CRĂCIUNAŞ

0. Introduction

Dans cette Note les auteurs établissent les équations de la dynamique des corps dont les masses sont variables, pour le modèle mécanique qui a été présenté dans les notes [8] et [9] et qui peut être rencontré dans quelques applications techniques.

Ce modèle est le solide dont la masse totale est divisée en trois zones distinctes :

a) la première zone corresponde à la masse constante, M_c ;

b) la seconde annèxe continûment de masses élémentaires, la masse de cette zone à l'instant t étant :

$$M_a = M_1^0 + M_1 + M_1^*, \tag{0.1}$$

où M_1^0 représente la masse annexée initialement, M_1 — la masse annéxée sans variations impulsives des vitesses des masses élémentaires et $M_1^* \ll M_1$ — la masse annexée impulsivement ; le centre C_a de cette masse a la vitesse de transport $\mathbf{v}_{C_{a_t}} = \mathbf{v}_Q + \omega \times \mathbf{r}'_{C_{a_t}}$ [1] ;

c) la troisième zone contient la masse continûment détachable, la valeur de cette masse à l'instant t étant :

$$M_d = M_2^0 - M_2 - M_2^*, \tag{0.2}$$

où M_2^0 est la masse détachable à l'instant initial, M_2 — la masse détachable sans variations impulsives des vitesses et $M_2^* \ll M_2$ — la masse détachable impulsivement ; le centre C_d de cette masse a la vitesse de transport $\mathbf{v}_{C_{d_t}} = \mathbf{v}_Q + \omega \times \mathbf{r}'_{C_d}$.

On considère toujours que les échanges des masses élémentaires avec l'extérieur ne modifient pas les directions des axes principaux d'inertie relatifs à un pôle Q invariablement lié au solide et qu'après l'annexement et avant le détachement les mouvements des masses élémentaires ne sont plus impulsifs.

---

[1]) Ici les lettres en traits grossis représentent des grandeurs vectorielles ; ω est le vecteur vitesse angulaire.

Pour les échanges nonimpulsives avec l'extérieur, l'impulsion de transport et le moment cinétique correspondant à la rotation instantanée autour du pôle Q ont, [8], [9], les expressions :

$$\mathbf{H}_t = M\mathbf{v}_{C_t} \tag{0.3}$$

et

$$\mathbf{K}_{Q_{\text{rot}}} = \mathcal{J}_j' \omega_j' \mathbf{i}_j' \text{ [2]}, \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{0.4}$$

$\mathbf{v}_{C_t}$ étant la vitesse de transport du centre de masse C de l'entier solide et $\mathcal{J}_j'$ — les moments principaux d'inertie du solide relatifs au pôle Q.

I. L'équation exprimant le théorème de l'impulsion

L'impulsion total de transport, $\mathbf{H}_{e_t}$, de l'ensemble formé à l'instant t par le solide et par la masse ΔM_1^* qui s'annexera impulsivement à la fin de l'interval Δt, est :

$$\mathbf{H}_{e_t}(t) = \mathbf{H}_t(t) + \Delta M_1^* \mathbf{v}_1^*, \tag{I.1}$$

$\mathbf{H}_t$ ayant la signification (0.3) et $\mathbf{v}_1^*$ étant la vitesse du centre de la masse ΔM_1^*, avant l'annexement.

À l'instant $t + \Delta t$, l'impulsion totale de transport du système sera :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{e_t}(t+\Delta t) = \mathbf{H}_t(t+\Delta t) - \Delta M_2^*(\mathbf{v}_{C_{d_t}} + \Delta\mathbf{v}_{C_{d_t}}) + \\ + \Delta M_1^*(\mathbf{v}_{C_{a_t}} + \Delta\mathbf{v}_{C_{a_t}}) + \Delta M_2^* \mathbf{v}_2^*,\end{aligned} \tag{I.2}$$

$\mathbf{v}_2^*$ étant la vitesse du centre de la masse ΔM_2^*, après le détachement impulsif.

La limite, pour $\Delta t \to 0$, du rapport entre la variation de l'impulsion totale $\mathbf{H}_{e_t}$ et le temps Δt, aura donc l'expression :

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{H}_{e_t}) = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{H}_t) - \left[\frac{\mathrm{d}M_1^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_1}^* - \mathbf{v}_{C_{a_t}}) - \frac{\mathrm{d}M_2^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_2}^* - \mathbf{v}_{C_{d_t}})\right], \tag{I.3}$$

le symbole $\mathrm{d}^*/\mathrm{d}t$ désignant, comme dans [9], la dérivation effectuée seulement pour le mouvement de transport et $\mathbf{v}_{C_1}^*$ et $\mathbf{v}_{C_2}^*$ représentant les limites dex vitesses $\mathbf{v}_1^*$ et $\mathbf{v}_2^*$.

Comme la variation de l'impulse $\mathbf{H}_{e_t}$ est provoquée par les mêmes forces extérieures qui sollicitent le solide dans l'absence des échanges impul-

---

[2]) On adopte la convention des indices muets pour la sommation, appliquée seulement aux indices latins qui se répètent au moins deux fois.

sives, on purra-t-écrire la relation exprimant le théorème de l'impulsion pour l'ensemble sous la forme établie dans [9], en remplaçant seulement l'impulsion $\mathbf{H}_t$ par l'impulsions $\mathbf{H}_{e_t}$, c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$\frac{d^*}{dt}(\mathbf{H}_{e_t}) - \left[\frac{dM_1}{dt}\mathbf{v}_{C_{a_t}} - \frac{dM_2}{dt}\mathbf{v}_{C_{d_t}}\right] = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{rc}, \tag{I.4}$$

$\mathbf{F}_{rc}$ étant le résultante des forces réactives relatives de Coriolis définies dans [9].

Tout en tenant compte de la singnification de l'impulsion $\mathbf{H}_t$ et introduisant la notation :

$$\frac{dM_1^*}{dt}(\mathbf{v}_{C_1}^* - \mathbf{v}_{C_{a_t}}) - \frac{dM_2^*}{dt}(\mathbf{v}_{C2}^* - \mathbf{v}_{C_{d_t}}^*) = \mathbf{F}_{ri}, \tag{I.5}$$

$\mathbf{F}_{ri}$ désignant la force résultante réactive impulsive, la relation (I.4) prends la forme :

$$M\mathbf{a}_{C_t} - \left[\frac{dM_1}{dt}(\mathbf{v}_{C_{a_t}} - \mathbf{v}_{C_t}) - \frac{dM_2}{dt}(\mathbf{v}_{C_{d_t}} - \mathbf{v}_{C_t})\right] = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{rc} + \mathbf{F}_{ri} \tag{I.6}$$

et représents *la première équation vectorielle du mouvement du solide dont la masse est variable.*

II. L'équation exprimant le théorème du moment cinétique

En vertu de l'hypothèse mentionnée au commencement, on pourra admettre que les moments cinétiques, par rapport au pôle fixe, des masses ΔM_1^* et ΔM_2^* se réduisent aux moments cinétiques de leurs centres de masses.

Pour le moment cinétique de transport de l'ensemble formé à l'instant t par le solide et par la masse ΔM_1^*, dont le centre sera $\mathbf{r}_1^*$, on peut écrire l'expression :

$$\mathbf{K}_{e_t}(t) = \mathbf{K}_t(t) + \mathbf{r}_1^* \times \Delta M_1^* \mathbf{v}_1^*, \tag{II.1}$$

où $\mathbf{K}_t = \mathbf{r}_Q \times \mathbf{H}_t + M\mathbf{r}_C' \times \mathbf{v}_Q + \mathcal{J}_j' \omega_j' \mathbf{i}_j'$, $(j = 1, 2, 3)$, est le moment cinétique du solide dans l'absence des échanges impulsives avec l'extérieur.

À l'instant $t + \Delta t$, le moment cinétique de transport de l'ensemble sera :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{e_t}(t + \Delta t) = \mathbf{K}_t(t + \Delta t) - \mathbf{r}_{C_d} \times \Delta M_2^*(\mathbf{v}_{C_{d_t}} + \Delta\mathbf{v}_{C_{d_t}}) + \\ + \mathbf{r}_{C_a} \times \Delta M_1^*(\mathbf{v}_{C_{d_t}} + \Delta\mathbf{v}_{C_{a_t}}) + \mathbf{r}_2^* \times \Delta M_2^* \mathbf{v}_2^*.\end{aligned} \tag{II.2}$$

La limite, pour $\Delta t \to 0$, du rapport entre la variation du moment cinétique $\mathbf{K}_{e_t}$ et le temps Δt, aura l'expression :

$$(II.3)\quad \frac{d^*}{dt}(\mathbf{K}_{e_t}) = \frac{d^*}{dt}(\mathbf{K}_t) - \left[\frac{dM_1}{dt}\mathbf{r}^*_{C_1} \times (\mathbf{v}^*_{C_1} - \mathbf{v}_{C_{a_t}}) - \frac{dM_2^*}{dt}\mathbf{r}^*_{C_2} \times (\mathbf{v}^*_{C_2} - \mathbf{v}_{C_{d_t}})\right],$$

$\mathbf{r}^*_{C_1}$ et $\mathbf{r}^*_{C_2}$ étant les valeurs limites des vecteurs $\mathbf{r}^*_1$ et $\mathbf{r}^*_2$, (dans plusieurs appplications on pourra considérer $\mathbf{r}^*_{C_1} = \mathbf{r}_{C_a}$ et $\mathbf{r}^*_{C_2} = \mathbf{r}_{C_d}$).

Cette variation du moment cinétique étant provoquée par les mêmes sollicitations extérieures comme dans les échanges nonimpulsives, on peut écrire pour l'ensemble la relation exprimant le théorème du moment cinétique établie dans [9], en remplaçant seulement le moment cinétique $\mathbf{K}_t$ par $\mathbf{K}_{e_t}$. On peut donc écrire:

$$(II.4)\quad \frac{d}{dt}(\mathbf{K}_t) - \left[\frac{dM_1}{dt}\mathbf{r}_{C_a} \times \mathbf{v}_{C_{a_t}} - \frac{dM_2}{dt}\mathbf{r}_{C_d} \times \mathbf{v}_{C_{d_t}}\right] - \left[\frac{dM_1^*}{dt}\mathbf{r}^*_{C_1} \times (\mathbf{v}^*_{C_1} - \mathbf{v}_{C_{a_t}}) - \frac{dM_2^*}{dt}\mathbf{r}^*_{C_2} \times (\mathbf{v}^*_{C_2} - \mathbf{v}_{C_{d_t}})\right] = \mathbf{M} + \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_{rc},$$

$\mathbf{M}_{rc}$ étant le vecteur moment résultant des forces réactives relatives et Coriolis.

Le passage du pôle fixe O au pôle Q invariablement lié au solide et l'introduction de la notation:

$$(II.5)\quad \frac{dM_1^*}{dt}\mathbf{r}'^*_{C_1} \times (\mathbf{v}^*_{C_1} - \mathbf{v}_{C_{a_t}}) - \frac{dM_2^*}{dt}\mathbf{r}'^*_{C_2} \times (\mathbf{v}^*_{C_2} - \mathbf{v}_{C_{d_t}}) = \mathbf{M}_{Q_{ri}}$$

($\mathbf{M}_{Q_{ri}}$ désignant le moment résultant par rapport au pôle Q des forces réactives impulsives et $\mathbf{r}'^*_{C_1}$ et $\mathbf{r}'^*_{C_1}$ ayant les signiffications: $\mathbf{r}'^*_{C_1} = \mathbf{r}^*_{C_1} - \mathbf{r}_Q$ et $\mathbf{r}'^*_{C_2} = \mathbf{r}^*_{C_2} - \mathbf{r}_Q$), permet de donner à la relation (II.4) la forme:

$$(II.6)\quad M\mathbf{r}'_C \times \mathbf{a}_Q + \frac{d^*}{dt}(\mathbf{K}_{Q_{rot}}) + \frac{dM}{dt}\mathbf{r}'_C \times \mathbf{v}_Q - \left[\frac{dM_1}{dt}\mathbf{r}'_{C_a} \times \mathbf{v}_{C_{a_t}} - \frac{dM_2}{dt}\mathbf{r}'_{C_d} \times \mathbf{v}_{C_{d_t}}\right] = \mathbf{M}_Q + \mathbf{M}_{Q_R} + \mathbf{M}_{Q_{rc}} + \mathbf{M}_{Q_{ri}},$$

qui représents *l'équation correspondante au théorème du moment cinétique du solide dont la masse est variable.*

III. Les équations scalaires de la dynamique du solide dont la masse est variable

Introduisant les notations:

$$(III.1)\quad \frac{dM_1}{dt}(\mathbf{v}_{C_{a_t}} - \mathbf{v}_{C_t}) - \frac{dM_2}{dt}(\mathbf{v}_{C_{d_t}} - \mathbf{v}_{C_t}) = \mathbf{F}_{rs}$$

et

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{dM_1}{dt}\mathbf{r}'_{C_a} \times \mathbf{v}_{C_{a_t}} - \frac{dM_2}{dt}\mathbf{r}'_{C_d} \times \mathbf{v}_{C_{d_t}} - \frac{dM}{dt}\mathbf{r}'_C \times \mathbf{v}_Q = \mathbf{M}_{Q_{rs}}$$

(l'expression $\mathbf{F}_{rs}$ pouvant être nommée *force réactive supplémentaire* et l'expression $\mathbf{M}_{rs}$ *moment résultant par rapport au pôle Q des forces réactives supplémentaires*), on pourrait écrire les équations vectorielles de la dynamique du solide dont la masse est variable sous la forme:

$$\text{(III.3)} \quad \begin{cases} M\mathbf{a}_{C_t} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{rc} + \mathbf{F}_{ri} + \mathbf{F}_{rs}, \\ M\mathbf{r}'_C \times \mathbf{a}_Q + \dfrac{d}{dt}(\mathbf{K}_{Q_{rot}}) = \mathbf{M}_Q + \mathbf{M}_{Q_R} + \mathbf{M}_{Q_{rc}} + \mathbf{M}_{Q_{ri}} + \mathbf{M}_{Q_{rs}}. \end{cases}$$

La projection de ces équations vectorielles — la première sur les axes du repère fixe et la deuxième sur les axes invariablement liés au solide —, permet d'obtenir les équations scalaires de la dynamique du solide dont la masse est variable.

Ces équations prennent des formes sensiblement simplifiées lorsque les échanges des particules matérielles avec l'extérieur ne modifient pas la position dans le solide du centre C de sa masse totale. En effet, le choix de ce centre comme pôle invariablement lié au solide ($\mathbf{r}'_C = 0$, $\mathbf{a}_{C_t} = \mathbf{a}_C$), conduira alors aux équations:

$$\text{(III.4)} \quad \begin{cases} M\mathbf{a}_C = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_{rc} + \mathbf{F}_{ri} + \mathbf{F}_{rs}, \\ \dfrac{d}{dt}(\mathbf{K}_{C_{rot}}) = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_{C_R} + \mathbf{M}_{C_{rc}} + \mathbf{M}_{C_{ri}} + \mathbf{M}_{C_{rs}}, \end{cases}$$

avec les équations de projection:

$$\text{(III.5)} \quad \begin{cases} Mx_{C_\sigma} = F_\sigma + R_\sigma + F_{rc_\sigma} + F_{ri_\sigma} + F_{rs_\sigma}, \\ \mathcal{J}'_\sigma \dot{\omega}'_\sigma + \delta_{ij\sigma}\mathcal{J}'_j \omega'_i \omega'_j + \dfrac{d\mathcal{J}'_\sigma}{dt}\omega'_\sigma = \mathfrak{M}'_{C_\sigma} + \mathfrak{M}'_{C_{R_\sigma}} + \\ \qquad + \mathfrak{M}'_{C_{rc_\sigma}} + \mathfrak{M}'_{C_{ri_\sigma}} + \mathfrak{M}'_{C_{rs_\sigma}}, \qquad (\sigma = 1, 2, 3), \end{cases}$$

les dernières trois représentant les équations d'Euler pour le solide dont la masse est variable.

Une autre particularisation des équations (III.3) peut être obtenue dans les conditions:

$$\text{(III.6)} \qquad \begin{cases} \mathbf{r}'_{C_a} - \mathbf{r}'_{C_d} = \mathbf{r}'_C, \qquad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{C_r} = 0, \\ \mathbf{v}_{C_{a_t}} - \mathbf{v}_{C_{d_t}} = \mathbf{v}_{C_t} = \mathbf{v}_C \ , \end{cases}$$

qui caractérisent le *modèle Mescerskii.*

En effet, dans les conditions (III.6) il en résulte:

$$\text{(III.7)} \qquad \mathbf{F}_{rc} = 0, \qquad \mathbf{M}_{C_{rc}} = 0;$$

ensuite:

$$\text{(III.8)} \qquad \mathbf{F}_{rs} = 0, \qquad \mathbf{M}_{C_{rs}} = 0$$

et:

$$\text{(III.9)} \qquad \begin{cases} \mathbf{F}_{ri} = \dfrac{\mathrm{d}M_1^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_1}^* - \mathbf{v}_C) - \dfrac{\mathrm{d}M_2^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_2}^* - \mathbf{v}_C), \\ \mathbf{M}_{C_{ri}} = \mathbf{r}'_C \times \left[\dfrac{\mathrm{d}M_1^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_1}^* - \mathbf{v}_C) - \dfrac{\mathrm{d}M_2^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_2}^* - \mathbf{v}_C)\right] = \mathbf{M}_C(\mathbf{F}_{ri}) = 0 \end{cases}$$

et les équations (III.3) deviennent:

$$\text{(III.10)} \qquad \begin{cases} M\mathbf{a}_C = \mathbf{F} + \mathbf{R} + \dfrac{\mathrm{d}M_1^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_1}^* - \mathbf{v}_C) - \dfrac{\mathrm{d}M_2^*}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}_{C_2}^* - \mathbf{v}_C), \\ \mathcal{J}'_j \dot{\omega}'_j \mathbf{i}'_j + \delta_{ijk}\mathcal{J}'_j \omega'_i \omega'_j \mathbf{i}'_k + \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}'_j}{\mathrm{d}t}\omega'_j \mathbf{i}'_j = \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_{C_R}, \qquad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Reçue le 5 avril 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N., *Asupra mişcării relative a solidului cu masă variabilă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, IV(VIII), *1–2* (1958).
2. Irimiciuc N., *Asupra formei ecuaţiilor lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme de puncte cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iaşi, IV(VIII), *1–2* (1958).
3. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Ecuaţii generalizate în sensul lui I. Ţenov şi D. Mangeron, pentru sisteme de puncte cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XI(XV), *3–4* (1965).
4. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme mecanice supuse la legături olonome.* Bul. Inst. polit. Iaşi, X(XIV), *3–4* (1964).
5. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu El., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* (I) *Liaisons géométriques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIII(XVII), *1–2* (1967); (II) *Liaisons cinématiques.* Ibid., XIII (XVII), *3–4* (1967).

6. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIII(XVII)**, *3—4* (1967).
7. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIV(XVII)**, *3—4* (1968).
8. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Neagu S., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variables.* (I) *Caratéristiques dynamiques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVI(XX)**, *3—4* (1970).
9. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Stancu M., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variable.* (II) *Théorèmes généraux.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVII(XXI)**, *1—2* (1971).
10. Космодемьянкии А. А., *Общие теоремы динамики тела переменноц массы.* МГУ, Механика, 33 (1953).
11. Новоселов В. С., *Некоторые вопросы механики переменных масс с учетам внутренного движения частиц.* (I) Вестник ЛГУ, *19* (1956); (II) Ibid., *1* (1957).
12. Новоселов В. С., *Движение гироскопических систем.* ПММ, **XXIII**, *1* (1959).
13. Новоселов В. С., *Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массати.* Вестник ЛГУ, *7* (1959).
14. Новоселов В. С., *Аналитическая механика систем с переменными массами.* Изд. Ленингр. Ун-та, 1969.
15. Сапа В. А., *Вариационные принципы в механике переменной массы.* Изв. АН КССР, сер. матем. мех., *5* (1956).
16. Сапа В. А., *К вопросу об основах аналитическом механики систем с переменноц массы.* Уч. зап. КГУ, **XXX**, *5* (1957).
17. Сапа В. А., *О вариационных принципах в механике переменноц массы.* Изв. АН КССР, сер. матем. и мех., *9* (1960).

ASUPRA ECUAŢIILOR DINAMICII SOLIDULUI CU MASĂ VARIABILĂ

(Rezumat)

În lucrare se stabilesc, pe baza modelului mecanic adoptat în lucrările [8] şi [9], ecuaţiile vectoriale (III.3) ale dinamicii solidului cu masă variabilă şi formele particulare (III.4) şi (III.10) corespunzătoare acestor ecuaţii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621–18

METODĂ PENTRU DETERMINAREA VITEZELOR ŞI A ACCELERAŢIILOR LA GRUPELE ASSURICE DE ORDINUL DOI

DE

C. DUCA

1. Principiul metodei

Mişcarea absolută a fiecăruia dintre elementele unui grup assuric se poate considera rezultanta unei mişcări de transport, efectuată împreună cu unul din elementele grupului, şi a unei mişcări relative în raport cu acelaşi element. Distribuţia de viteze şi acceleraţii în mişcarea de transport este identică cu aceea a elementului împreună cu care se execută această mişcare, iar distribuţia de viteze şi acceleraţii în mişcarea relativă este identică cu aceea a unui mecanism, format din grupul studiat fără cuplele exterioare, avînd drept bază elementul împreună cu care se execută mişcarea de transport. Vom denumi acest mecanism, pentru simplificarea expunerii, *mecanismul grupului*.

Deci, dacă se cunoaşte distribuţia de viteze şi acceleraţii pentru un element oarecare k şi pentru mecanismul grupului, definit cu elementul k drept bază, se poate determina viteza şi acceleraţia unui punct oarecare M_i, aparţinînd elementului i:

$$\mathbf{v}_{M_i} = \mathbf{v}_{M_k} + \mathbf{v}_{M_{ik}}, \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_{M_i} = \mathbf{a}_{M_k} + \mathbf{a}^{C}_{M_{ik}} + \mathbf{a}^{r}_{M_{ik}}. \tag{2}$$

Mărimile $\mathbf{v}_{M_k}$, $\mathbf{a}_{M_k}$, ω_k (de care depinde $\mathbf{a}^{C}_{M_{ik}}$) sînt caracteristici ale mişcării elementului k, iar $\mathbf{v}_{M_{ik}}$, $\mathbf{a}^{r}_{M_{ik}}$ sînt caracteristici ale mişcării elementului i în mecanismul grupului.

Metoda propusă constă în determinarea, funcţie de parametrii cinematici cunoscuţi, a distribuţiei de viteze şi acceleraţii în cele două mişcări definite mai sus. Folosind apoi ecuaţii de forma (1) şi (2), se poate stabili

starea cinematică a oricărui element din grupul studiat. Această problemă se poate rezolva fără dificultăți pentru grupele assurice de ordinul 2 (după clasificarea lui I. I. Artobolevski) care au gradul de mobilitate al mecanismului grupului egal cu unitatea.

Formula de calcul pentru gradul de mobilitate al mecanismului grupului este:

$$M = 3(n-1) - 2c_5^i, \tag{3}$$

în care n este numărul de elemente ale grupului, iar c_5^i este numărul de cuple interioare ale grupului.

În cazul grupelor de ordinul 2, care au două cuple exterioare,

$$c_5^i = c_5 - 2, \tag{4}$$

unde c_5 reprezintă numărul total de cuple ale grupului.

Introducînd expresia (4) a lui c_5^i în relația (3) și ținînd seama de formula structurală a grupului assuric $3n - 2c_5 = 0$, se obține, într-adevăr, $M = 1$.

În cele ce urmează se indică modul de determinare a vitezelor și a accelerațiilor, pentru fiecare din cele trei variante ale grupului de ordinul 2: grupul cu ambele cuple exterioare de rotație, grupul cu o cuplă exterioară de rotație și una de translație și grupul cu ambele cuple exterioare de translație.

2. Grupul de ordinul 2 cu ambele cuple exterioare de rotație

Se consideră un grup de ordinul 2 (fig. 1 *a*), avînd cuplele exterioare de rotație A și B, care leagă elementele k și m ale grupului, de elementele exterioare l și n. Mecanismul grupului se definește cu elementul k drept bază.

2.1. Determinarea vitezelor

Între vitezele punctelor B_m și B_k există relația:

$$\mathbf{v}_{B_m} = \mathbf{v}_{B_k} + \mathbf{v}_{B_{mk}}. \tag{5}$$

Viteza punctului B_k se poate exprima în funcție de viteza punctului A_k prin relația lui Euler:

$$\mathbf{v}_{B_k} = \mathbf{v}_{A_k} + \mathbf{v}_{B_kA_k}. \tag{6}$$

Înlocuind expresia (6) a lui $\mathbf{v}_{B_k}$ în ecuația (5), se obține:

$$\mathbf{v}_{B_m} = \mathbf{v}_{A_k} + \mathbf{v}_{B_kA_k} + \mathbf{v}_{B_{mk}}. \tag{7}$$

Ecuația vectorială (7), în care se cunosc complet vectorii $\mathbf{v}_{A_k}$ și $\mathbf{v}_{B_m}$, precum și direcția vectorului $\mathbf{v}_{B_k A_k}$ (perpendiculară pe dreapta AB), se poate rezolva grafic, cu condiția să se stabilească în prealabil direcția vectorului $\mathbf{v}_{B_{mk}}$.

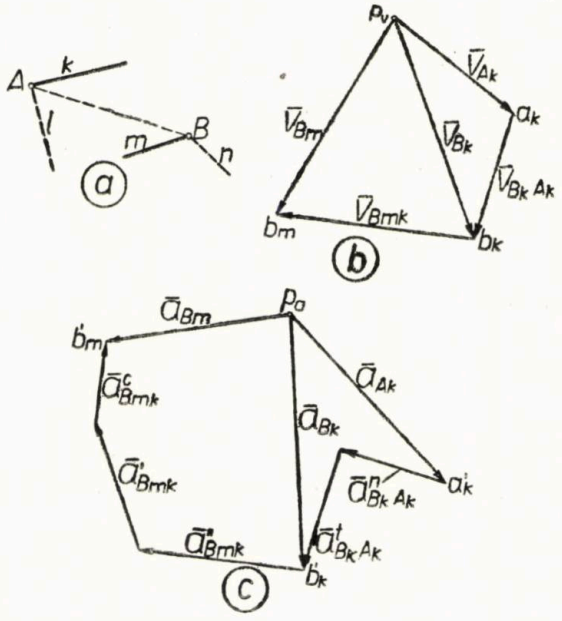


Fig. 1

Viteza relativă $\mathbf{v}_{B_{mk}}$ caracterizează mișcarea punctului B_m în mecanismul grupului. Deoarece acest mecanism are gradul de mobilitate egal cu unitatea, direcțiile vitezelor sînt bine determinate și nu depind de mișcarea elementului conducător. Pentru a determina direcția vitezei $\mathbf{v}_{B_{mk}}$ se construiește planul vitezelor pentru mecanismul grupului, plecînd de la o viteză reprezentativă inițială arbitrară. Acest plan este ușor de construit deoarece mecanismul grupului are, în cazurile uzuale, clasa a II-a.

În fig. 1 *b* este reprezentat poligonul vectorial corespunzător ecuației (7). Din acest poligon se determină $\mathbf{v}_{B_k}$ care, împreună cu $\mathbf{v}_{A_k}$, definește distribuția de viteze în elementul k, precum și $\mathbf{v}_{B_{mk}}$ care permite aflarea scării planului vitezelor construit pentru mecanismul grupului, definind astfel distribuția de viteze în acest mecanism.

2.2 Determinarea acceleraţiilor

Între acceleraţiile punctelor B_m şi B_k există relaţia:

$$\mathbf{a}_{B_m} = \mathbf{a}_{B_k} + \mathbf{a}^{C}_{B_{mk}} + \mathbf{a}^{r}_{B_{mk}}. \tag{8}$$

Acceleraţia punctului B_k se poate exprima, în funcţie de acceleraţia punctului A_k, prin relaţia lui Euler:

$$\mathbf{a}_{B_k} = \mathbf{a}_{A_k} + \mathbf{a}^{n}_{B_kA_k} + \mathbf{a}^{t}_{B_kA_k}. \tag{9}$$

Înlocuind expresia lui $\mathbf{a}_{B_k}$ (9) în formula (8) se obţine:

$$\mathbf{a}_{B_m} = \mathbf{a}_{A_k} + \mathbf{a}^{n}_{B_kA_k} + \mathbf{a}^{t}_{B_kA_k} + \mathbf{a}^{C}_{B_{mk}} + \mathbf{a}^{r}_{B_{mk}}. \tag{10}$$

Acceleraţia relativă $\mathbf{a}^{r}_{B_{mk}}$ caracterizează mişcarea punctului B_m în mecanismul grupului şi se poate pune sub forma:

$$\mathbf{a}^{r}_{B_{mk}} = \mathbf{a}'_{B_{mk}} + \mathbf{a}''_{B_{mk}}, \tag{11}$$

cu $\mathbf{a}'_{B_{mk}}$, $\mathbf{a}''_{B_{mk}}$ — acceleraţia primară, respectiv secundară [4], a punctului B_m caracterizind mişcarea sa în mecanismul grupului.

Acceleraţia primară $\mathbf{a}'_{B_{mk}}$ se determină construind planul acceleraţiilor primare (care depind numai de viteze) pentru mecanismul grupului.

Introducînd expresia (11) a acceleraţiei $\mathbf{a}^{r}_{B_{mk}}$ în formula (10) se obţine:

$$\mathbf{a}_{B_m} = \mathbf{a}_{A_k} + \mathbf{a}^{n}_{B_kA_k} + \mathbf{a}^{t}_{B_kA_k} + \mathbf{a}^{C}_{B_{mk}} + \mathbf{a}'_{B_{mk}} + \mathbf{a}''_{B_{mk}}. \tag{12}$$

Ecuaţia (12) poate fi rezolvată grafic (fig. 1 *c*) întrucît se cunosc complet vectorii $\mathbf{a}_{B_m}$, $\mathbf{a}_{A_k}$, $\mathbf{a}^{n}_{B_kA_k}$, $\mathbf{a}^{C}_{B_{mk}}$, $\mathbf{a}'_{B_{mk}}$, precum şi direcţiile vectorilor $\mathbf{a}^{t}_{B_kA_k}$ (perpendiculară pe dreapta AB) şi $\mathbf{a}''_{B_{mk}}$ (paralelă cu direcţia vectorului $\mathbf{v}_{B_{mk}}$). Din poligonul vectorial rezultat se determină $\mathbf{a}_{B_k}$ care, împreună cu $\mathbf{a}_{A_k}$, defineşte distribuţia de acceleraţii în elementul k, precum şi $\mathbf{a}''_{B_{mk}}$ care permite calculul scării planului acceleraţiilor secundare construit pentru mecanismul grupului. Ca plan al acceleraţiilor secundare se poate utiliza planul vitezelor, ambele avînd aceeaşi configuraţie. Planele acceleraţiilor primare şi secundare definesc distribuţia de acceleraţii în mecanismul grupului.

3. Grupul de ordinul 2 cu o cuplă exterioară de rotație și una de translație

Se consideră grupul de ordinul 2 (fig. 2*a*) având o cuplă exterioară de translație *A*, care leagă elementul *k* de elementul exterior *l* și o cuplă exterioară de rotație *B*, care leagă elementul *m* de elementul *n*. Mecanismul grupului se definește cu elementul *k* drept bază.

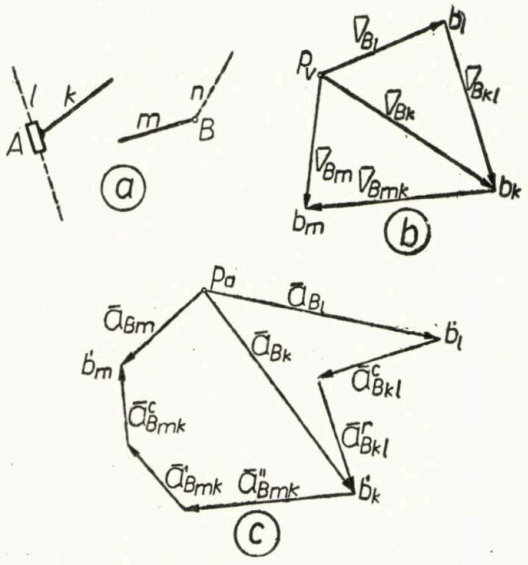


Fig. 2

3.1. Determinarea vitezelor

Între vitezele punctelor B_m și B_k are loc relația (5). Viteza punctului B_k se poate exprima în funcție de viteza punctului B_l, sub forma:

$$\mathbf{v}_{B_k} = \mathbf{v}_{B_l} + \mathbf{v}_{B_{kl}}, \tag{13}$$

care înlocuită în (5) conduce la:

$$\mathbf{v}_{B_m} = \mathbf{v}_{B_l} + \mathbf{v}_{B_{kl}} + \mathbf{v}_{B_{mk}}. \tag{14}$$

În ecuația vectorială (14) se cunosc complet vectorii $\mathbf{v}_{B_m}$ și $\mathbf{v}_{B_l}$, precum și direcția vectorului $\mathbf{v}_{B_{kl}}$ (paralelă cu ghidajul cuplei de translație *A*). Direcția vitezei relative $\mathbf{v}_{B_{mk}}$ se determină prin construcția planului vitezelor pentru mecanismul grupului. În felul acesta ecuația vectorială (14) se poate rezolva grafic.

Din poligonul vectorial rezultat (fig. 2*b*) se determină $\mathbf{v}_{B_k}$ care, împreună cu ω_k — cunoscut ($\omega_k = \omega_l$), definește distribuția de viteze în elementul k, precum și $\mathbf{v}_{B_{mk}}$ care determină distribuția de viteze în mecanismul grupului, în modul arătat la paragraful precedent.

3.2. Determinarea accelerațiilor

Între accelerațiile punctelor B_m și B_k are loc relația (8). Accelerația punctului B_k se poate exprima în funcție de accelerația punctului B_l sub forma:

$$\mathbf{a}_{B_k} = \mathbf{a}_{B_l} + \mathbf{a}^C_{B_{kl}} + \mathbf{a}^r_{B_{kl}}, \tag{15}$$

care înlocuită în (8) dă:

$$\mathbf{a}_{B_m} = \mathbf{a}_{B_l} + \mathbf{a}^C_{B_{kl}} + \mathbf{a}^r_{B_{kl}} + \mathbf{a}^C_{B_{mk}} + \mathbf{a}^r_{B_{mk}}. \tag{16}$$

Accelerația relativă $\mathbf{a}^r_{B_{mk}}$ se poate pune sub forma (11), iar relația (16) devine:

$$\mathbf{a}_{B_m} = \mathbf{a}_{B_l} + \mathbf{a}^C_{B_{kl}} + \mathbf{a}^r_{B_{kl}} + \mathbf{a}^C_{B_{mk}} + \mathbf{a}'_{B_{mk}} + \mathbf{a}''_{B_{mk}}. \tag{17}$$

În ecuația vectorială (17) se cunosc complet vectorii $\mathbf{a}_{B_m}$, $\mathbf{a}_{B_l}$, $\mathbf{a}^C_{B_k}$, $\mathbf{a}^C_{B_{mk}}$, precum și direcțiile vectorilor $\mathbf{a}^r_{B_{kl}}$ (paralelă cu ghidajul cuplei de translație) și $\mathbf{a}''_{B_{mk}}$ (paralelă cu direcția vectorului $\mathbf{v}_{B_{mk}}$). Accelerația primară $\mathbf{a}'_{B_{mk}}$ se determină construind planul accelerațiilor primare pentru mecanismul grupului. În acest fel, ecuația vectorială (17) se poate rezolva grafic.

Din poligonul vectorial rezultat (fig. 2*c*) se determină $\mathbf{a}_{B_k}$ care, împreună cu ω_k și $\varepsilon_k = \varepsilon_l$, definește distribuția de accelerații în elementul k, precum și $a''_{B_{mk}}$ care determină distribuția de accelerații în mecanismul grupului, în modul arătat la paragraful precedent.

4. Grupul de ordinul 2 cu ambele cuple exterioare de translație

Se consideră un grup de ordinul 2 (fig. 3*a*) având cuplele exterioare de translație A și B care leagă elementele k și m ale grupului de elementele exterioare l și n. Mecanismul grupului se definește cu elementul k drept bază.

4.1. Determinarea vitezelor

Fie patru puncte, suprapuse la momentul considerat în C, aparţinînd celor patru elemente: k, l, m şi n. Între vitezele lor se pot scrie următoarele ecuaţii vectoriale:

$$\mathbf{v}_{C_n} = \mathbf{v}_{C_m} + \mathbf{v}_{C_{nm}}, \quad \mathbf{v}_{C_m} = \mathbf{v}_{C_k} + \mathbf{v}_{C_{mk}}, \quad \mathbf{v}_{C_k} = \mathbf{v}_{C_l} + \mathbf{v}_{C_{kl}}, \tag{18}$$

de unde rezultă prin două înlocuiri succesive

$$\mathbf{v}_{C_n} = \mathbf{v}_{C_l} + \mathbf{v}_{C_{kl}} + \mathbf{v}_{C_{mk}} + \mathbf{v}_{C_{mn}}. \tag{19}$$

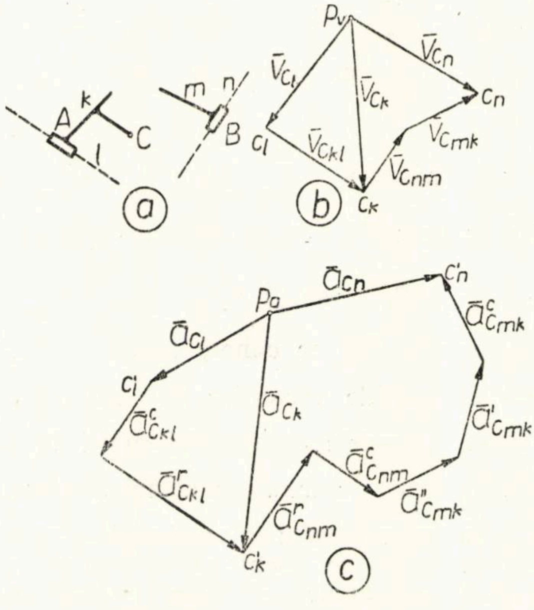


Fig. 3

Ecuaţia vectorială (19), in care se cunosc complet vectorii $\mathbf{v}_{C_n}$ şi $\mathbf{v}_{C_l}$, precum şi direcţiile vectorilor $\mathbf{v}_{C_{kl}}$ (paralelă cu ghidajul cuplei de translaţie A) şi $\mathbf{v}_{C_{nm}}$ (paralelă cu ghidajul cuplei de translaţie B) se poate rezolva grafic, cu condiţia să se determine în prealabil vectorul $\mathbf{v}_{C_{mk}}$.

Viteza relativă $\mathbf{v}_{C_{mk}}$ rezultă din planul vitezelor construit pentru mecanismul grupului. Scara acestui plan se calculează în funcţie de mărimea reală a uneia din vitezele de rotaţie, corespunzătoare mişcării relative a elementului m în raport cu elementul k, viteză reprezentată în acest plan. La rîndul său, valoarea reală a acestei viteze se determină pe baza vitezei unghiulare ω_{mk}, care este

(20) $$\omega_{mk} = \omega_m - \omega_k = \omega_n - \omega_l .$$

Din poligonul vectorial construit în baza ecuației (19) (fig. 3*b*) rezultă viteza $\mathbf{v}_{C_k}$ care, împreună cu $\omega_k = \omega_l$ definește distribuția de viteze în elementul *k*. Distribuția de viteze în mecanismul grupului este cunoscută deoarece planul vitezelor corespunzător acestui mecanism este construit la scară.

4.2. Determinarea accelerațiilor

Între accelerațiile punctelor C_n, C_m, C_k și C_l se pot scrie relațiile:

(21) $$\mathbf{a}_{C_n} = \mathbf{a}_{C_m} + \mathbf{a}^{C}_{C_{nm}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{nm}}, \quad \mathbf{a}_{C_m} = \mathbf{a}_{C_k} + \mathbf{a}^{C}_{C_{mk}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{mk}},$$
$$\mathbf{a}_{C_k} = \mathbf{a}_{C_l} + \mathbf{a}^{C}_{C_{kl}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{kl}},$$

de unde rezultă:

(22) $$\mathbf{a}_{C_n} = \mathbf{a}_{C_l} + \mathbf{a}^{C}_{C_{kl}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{kl}} + \mathbf{a}^{C}_{C_{mk}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{mk}} + \mathbf{a}^{C}_{C_{nm}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{nm}}.$$

Introducînd în ecuația (22) expresia de forma (11) a lui $\mathbf{a}^{r}_{C_{mk}}$ se obține:

(23) $$\mathbf{a}_{Cn} = \mathbf{a}_{C_l} + \mathbf{a}^{C}_{C_{kl}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{kl}} + \mathbf{a}^{C}_{C_{mk}} + \mathbf{a}'_{C_{mk}} + \mathbf{a}'_{C_{mk}} + \mathbf{a}^{C}_{C_{nm}} + \mathbf{a}^{r}_{C_{nm}}.$$

În ecuația vectorială (23) se cunosc complet vectorii $\mathbf{a}_{C_n}$, $\mathbf{a}_{C_l}$, $\mathbf{a}^{C}_{C_{kl}}$, $\mathbf{a}^{C}_{C_{mk}}$, $\mathbf{a}^{C}_{C_{nm}}$, precum și direcțiile vectorilor $\mathbf{a}^{r}_{C_{kl}}$ (paralelă cu ghidajul cuplei de translație *A*) și $\mathbf{a}^{r}_{C_{nm}}$ (paralelă cu ghidajul cuplei de aranslație *B*).

Accelerațiile $\mathbf{a}'_{C_{mk}}$ și $\mathbf{a}''_{C_{mk}}$ rezultă din planul accelerațiilor primare respectiv secundare, construite pentru mecanismul grupului. Scara pentru planul accelerațiilor secundare se calculează în funcție de mărimea reală a uneia din accelerațiile tangențiale secundare, corespunzătoare mișcării relative a elementului *m* în raport cu elementul *k*, accelerație reprezentată în acest plan. La rîndul său, mărimea reală a acestei accelerații se determină în funcție de accelerația unghiulară secundară ε''_{mk}, care este

(24) $$\varepsilon''_{mk} = \varepsilon_{mk} - \varepsilon'_{mk} \quad \text{cu} \quad \varepsilon_{mk} = \varepsilon_m - \varepsilon_k = \varepsilon_n - \varepsilon_l,$$

în care ε'_{mk} este accelerația unghiulară primară a elementului *m* în mișcarea sa în mecanismul grupului.

Din poligonul vectorial construit pe baza ecuației (23) (fig. 3*c*) rezultă accelerația $\mathbf{a}_{C_k}$ care, împreună cu $\varepsilon_k = \varepsilon_l$ și $\omega_k = \omega_l$, definește distribuția de accelerații în elementul *k*. Distribuția de accelerații în mecanismul grupului este cunoscută, deoarece planele accelerațiilor primare și secundare corespunzătoare acestui mecanism, sînt construite la scară.

5. Concluzii

1. Metoda propusă, de determinare a vitezelor și a accelerațiilor, se poate aplica pentru toate grupele assurice de ordinul 2, dar prezintă avantaje deosebite pentru grupele cu 6 sau mai puține elemente. În aceste cazuri mecanismul grupului este de clasa a II-a, iar construcția grafică este mai simplă decît cea folosită la aplicarea metodei pozițiilor fictive.

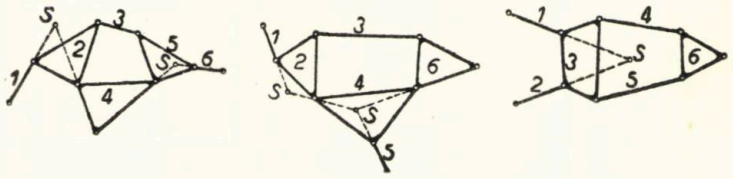


Fig. 4

2. Prin asociere cu metoda punctelor singulare, metoda propusă se poate aplica și grupelor de ordin diferit de 2. Astfel, în cazul grupelor de clasa a IV-a, ordinul 3, reprezentate în fig. 4, după determinarea vitezelor și accelerațiilor punctelor singulare indicate pe desen, problema se reduce la studiul unor grupe de clasa a IV-a, ordinul 2.

Primită la 5 iunie 1970

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mecanisme și organe de mașini,
Laboratorul de teoria mecanismelor

BIBLIOGRAFIE

1. Artobolevski I. I., *Teoria mecanismelor și mașinilor.* Ed. tehn., Buc., 1955 (trad. din l. rusă).
2. Mangeron D. I., Drăgan C., Munteanu O., *Studiul mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare prin metoda accelerațiilor reduse.* Bul. Inst. polit. Iași, **III** (**VII**), *3—4* (1957).
3. Manolescu N. I., Erceanu I., Antonescu P., *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate.* St. și cerc. de Mec. apl., **XIII**, *6* (1962).
4. Pelecudi Chr., *Bazele analizei mecanismelor.* Ed. Acad. R.S.R., Buc., 1967.
5. * * * *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Structura și cinematica mecanismelor.* Ed. tehn., Buc., 1959.

A METHOD FOR DETERMINATION THE VELOCITIES AND ACCELERATIONS OF THE SECOND ORDER ASSUR-GROUPS

(Summary)

The proposed method is based on the here introduced notion of *mechanism of the group.* This mechanism consists of the group itself without external coupling, having as fixed link one of the linkage. In case of groups of the second order its degree of mobility is 1, and that allows a simple solving of the problem of determining the velocities and accelerations.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.882.1

CONTRIBUTIONS AU CALCUL DES ASSEMBLAGES À VIS PRÉCONTRAINTES À BASE DE RECHERCHES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Note I

ÉTUDE THÉORIQUE CONCERNANT LE COMPORTEMENT DES ASSEMBLAGES À VIS PRÉCONTRAINTES AVEC GARNITURES RHÉOLOGIQUES

PAR

N. G. POPINCEANU et E. N. DIACONESCU

Notations

F_0 — force de précontrainte ou de serrage initial

F — force extérieure ou d'exploitation qui revient à une seule vis

F_s — force en vis, après l'application de la force F

F_r — force remanente de compression dans les éléments assemblés

$c_s = \mathrm{tg}\varphi$, $c_p = \mathrm{tg}\psi$ — rigidité de la vis et respectivement des éléments assemblés

d_1, d_2 — diamètre à fond et respectivement à flanc de filet

M_{S0}, M_{p0} — moment de vissage du filet, respectivement moment de frottement entre l'écrou et son support

α — angle d'inclinaison hélicoïdale du filet.

$\rho' = \mathrm{arc\,tg}\ \mu'$ — angle de frottement du filet

μ_p — coefficient de frottement entre l'écrou et son support

$D_1 = 0,95S$ — diamètre extérieur de contact entre l'écrou, ou la tête de vis, et le support (S — ouverture de la clé)

d_g — diamètre du trou pour vis

σ_{ech} — contrainte équivalente dans la vis

σ_a — contrainte admissible pour le matériau de la vis

σ_{lim} — contrainte limite pour le matériau de la vis

c — coefficient de sécurité de la vis (d'habitude $c = 1,8$)

c_{si}, l_{si}, A_{si} — rigidités, longueurs et aires des tronçons de la vis

E_s — coefficient d'élasticité longitudinale du matériel de la vis

c_{pi}, l_{pi}, A_{pi}, E_{pi} — rigidités, épaisseurs, aires moyennes affectées par contraintes et respectivement modules d'élasticité des éléments assemblés

η_i, η_v — viscosités du matériel de la garniture qui caractérisent les déformations visqueues et élastique-retardées

E_e, E_i, E_g — module d'élasticité instantanée, module stabilisé d'élasticité retardée et respectivement module global de déformation dans le régime stabilisé du matériel de la garniture, qui sont liés par les elations

$$\frac{1}{E_g} = \frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_i}, \qquad E_e = nE_i,$$

n étant un coefficient caractéristique du materiel, qui se détermine par voie expérimentale [11]

l_g — épaisseur de la garniture plastique

l_p — épaisseur totale des éléments assemblés

δ_{s0}, δ_{p0} — déformation élastique instantanée de la vis et des éléments assemblés, au moment initial ($t=0$)

$\delta_{s0}(t)$ — déformation élastique instantanée, de la vis, correspondante à la force $F_0(t)$ de serrage initial au moment t

$\delta_{e0}(t)$, $\delta_{is}(t)$ et $\delta_{v0}(t)$ — déformation élastique instantanée, élastique retardée et respectivement visqueuse des éléments assemblés, correspondante à la force $F_0(t)$

c_{p0} — rigidité des éléments assemblés au moment initial ($t = 0$)

A_g — aire moyenne affectée par contraintes dans la garniture

$\delta_{p0}(t)$ — déformation totale des éléments assemblés, correspondante à la force $F_0(t)$

c_{pm} — rigidité des éléments métalliques assemblés

c_{g0}, $c_g(t)$ — rigidité de la garniture plastique au moment initial et respectivement au moment t

$\delta_s(\tau)$ — déformation élastique de la vis au moment $\tau \geq t$, après l'application de la force F

$\delta_e(\tau)$, $\delta_i(\tau)$, $\delta_v(\tau)$, $\delta_p(\tau)$ — déformation élastique instantanée, élastique retardée, visqueuse et respectivement totale des éléments assemblés au moment τ

t_e — temps de stabilisation de la force de serrage initial en cas que l'un des éléments assemblés a des déformations élastiques instantanées et retardées

F_{set}, F_{ret} — force stabilisée de la vis et des éléments assemblés quand la force F s'applique au moment $t > t_e$

F_{se}, F_{re} — force stabilisée de la vis et des éléments assemblés quand la force F s'applique au moment $t \geq t_e$

F_{0e} — force de serrage initial stabilisée ($t \geq t_e$)

I. Considérations générales concernant le niveau actuel de calcul

Pour le calcul des assemblages à vis précontraintes on utilise les relations suivantes bien connues :

$$F_s = F_0 + \frac{c_s}{c_s + c_p} F, \tag{I.1}$$

$$F_r = F_0 - \frac{c_p}{c_s + c_p} F, \tag{I.2}$$

déduites de la fig. 1, supposant que les déformations de l'assemblage sont élastiques. En général les données initiales pour un projet sont : les dimensions et les matériaux des éléments de l'assemblage, la force F d'exploitation et la force remanente F_r nécessaire pour assurer l'étanchéité ou pour éviter les sollicitations par choc.

À l'aide des relations (I.1) et (I.2) on peut calculer les forces F_0 et F_s si on connaît les rigidités c_s et c_p. Pour assurer la force F_0 de serrage initial, chaque vis doit être vissée avec le moment de la clé M_{c0}, donné par la relation :

$$M_{c0} = M_{S0} + M_{p0} = F_0 \left[\frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(f' + \alpha) + \frac{\mu_p}{3} \frac{D_1^3 - d_g^3}{D_1^2 - d_g^2} \right]. \tag{I.3}$$

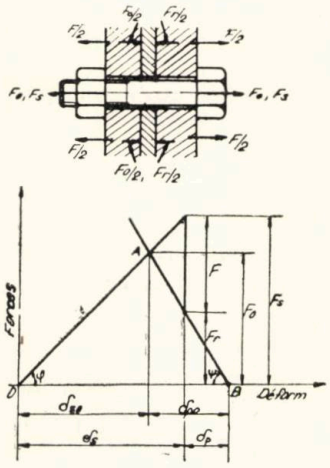


Fig. 1. — Le diagramme forces-déformations d'un assemblage à vis précontraintes dans le cas des déformations élastiques.

Le moment M_{S0}

$$M_{S0} = F_0 \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\rho' + \alpha) \tag{I.4}$$

s'enmagasine élastiquement dans la tige de la vis, en donnant la contrainte de torsion τ_0:

$$\tau_0 = \frac{M_{S0}}{W_p} = \frac{16 M_{S0}}{\pi d_1^3}. \tag{I.5}$$

La méthode actuelle de calcul considère que le moment M_{S0} (et donc la contrainte τ_0) se maintient le même et après l'application de la force F.

Le force F_S sollicite la vis à la traction, en donnant la contrainte σ_S :

$$\sigma_S = \frac{F_S}{A_S} = \frac{4 F_S}{\pi d_1^2}. \tag{I.6}$$

La vis est donc soumise à la sollicitation composée et (si finalement, après l'application de la force F, on n'agit plus avec la clé) on la vérifie à la résistance avec la relation:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_s^2 + 3\tau_0^2} \leqslant \sigma_a = \frac{\sigma_{lim}}{c} \cdot \tag{I.7}$$

Ce mode de calcul des assemblages à vis précontraintes a quelques défauts basées sur les observations suivantes :

1. Pour le calcul de la rigidité c_s on utilise la relation :

$$\frac{1}{c_s} = \sum \frac{1}{c_{si}} = \sum \frac{l_{si}}{A_{si} E_{si}}, \tag{I.8}$$

qui est justifiée théoriquement et vérifiée expérimentalement [1] ; pour le calcul de la rigidité des éléments assemblés on utilise la relation :

$$\frac{1}{c_p} = \sum \frac{1}{c_{pi}} = \sum \frac{l_{pi}}{A_{pi} E_{pi}}, \tag{I.9}$$

pour laquelle on calcule les aires A_{pi} dans diverses hypothèses en ce qui concerne la distribution des contraintes de compression dans ces éléments [2]...[6].

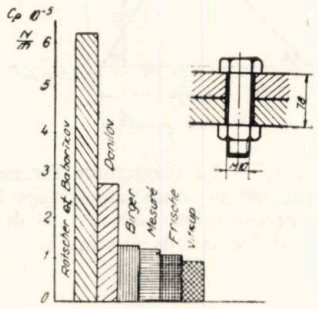


Fig. 2. — La rigidité c_p calculée par diverses méthodes et mesurée [6] pour un assemblage avec des tôles d'acier (l_p=78 mm) et avec une vis M 10.

Ces distributions, soit qu'elles ne concordent pas avec la théorie de l'élasticité, soi qu'elles n'aient pas un caractère de généralité ; leur utilisation conduit à des rigidités c_p très différentes, ainsi qu'il résulte de la fig. 2, et donc à un calcul erroné des forces de l'assemblage.

2. La méthode présentée est applicable seulement aux assemblages avec des éléments élastiques. Mais il est connu qu'une grande partie des assemblages utilisés en technique ont des garnitures plastiques à base de polymères ou d'autres matériaux avec un comportement similaire, comme serait le tephlon, le caoutchouc, le klingerit etc. Relativement au comportement et au calcul de ces assemblages, la littérature de specialité présente un très petit nombre de données, insuffisantes pour réaliser un projet technique.

3. Quelques essais expérimentaux [7] ont montré que le moment de torsion de la tige de la vis n'est pas toujours donné par la relation (I.4); il baisse quand on applique la force F.

En partant de ces observations, le présent travail se propose d'établir les relations fonctionnelles des assemblages avec des garnitures plastiques, de préconiser une méthode correcte et généralement valable pour le calcul de la rigidité des éléments assemblés (avec et sans garnitures plastiques), de préciser la valeur du moment de torsion de la vis pendant le fonctionnement et ainsi de permettre un calcul correcte des vis.

II. Étude théorique concernant les relations fonctionnelles et de calcul en cas que l'un des éléments assemblés a un comportement rhéologique

II.1. Cas général des garnitures avec des déformations élastiques instantanées, élastiques retardées et visqueuses

Pour déduire les relations fonctionnelles d'un assemblage à vis précontraintes dans un cas général, on considère que les éléments assemblés sont des tôles métalliques et des garnitures plastiques à base de polymères; le comportement d'un tel assemblage dépend du comportement rhéologique de la garniture.

II.1.1. *Changement par rapport au temps de la force de serrage initial*

La déformation d'un polymère soummis à une sollicitation axiale et à une température constante peut être appréciée sur la base du modèle mathématique représenté dans la fig. 3, obtenu par la connexion en série du modèle Voight et du modèle Maxwell [8].

On observe que la déformation totale $\delta(t)$ entre A et D a trois composantes: l'une élastique instantanée $\delta_e(t)$ entre C et D, l'une visqueuse $\delta_v(t)$ entre B et C (toutes les deux décrites par le modèle Maxwell) et l'une élastique retardée $\delta_i(t)$ entre A et B (décrite par le modèle Voight) et donc:

$$\delta(t) = \delta_i(t) + \delta_v(t) + \delta_e(t). \tag{II.1}$$

Lorsque la contrainte σ_0 du polymère est constante, la déformation unitaire totale du polymère, $\varepsilon(t)$, au moment t, est donnée par [9] la relation:

$$\varepsilon(t) = \frac{\delta(t)}{l_g} = \varepsilon_i(t) + \varepsilon_v(t) + \varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_0}{E_i}\left(1 - e^{-\frac{E_i}{\eta_i}t}\right) + \frac{\sigma_0}{\eta_v}t + \frac{\sigma_0}{E_e}. \tag{II.2}$$

Si la contrainte $\sigma_0(t)$ varie par rapport au temps, la déformation unitaire totale s'obtient en utilisant le principe de superposition de Boltzmann [10], de sorte qu'on peut écrire:

$$\varepsilon(t) = \frac{\delta(t)}{l_g} = \varepsilon_i(t) + \varepsilon_v(t) + \varepsilon_e(t) =$$

(II.3)

$$= \frac{1}{\eta_i}\int_0^t \sigma_0(t-s)\mathrm{e}^{-\frac{E^i}{\eta_i}s}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\eta_v}\int_0^t \sigma_0(s)\mathrm{d}s + \frac{\sigma_0(t)}{E_e}.$$

De la relation (II.3) résulte qu'au moment initial ($t = 0$) les déformations unitaires élastiques retardées et visqueuses sont nulles et par conséquent le polymère a seulement des déformations élastiques instantanées; ultérieurement se développent aussi les deux autres déformations spécifiques.

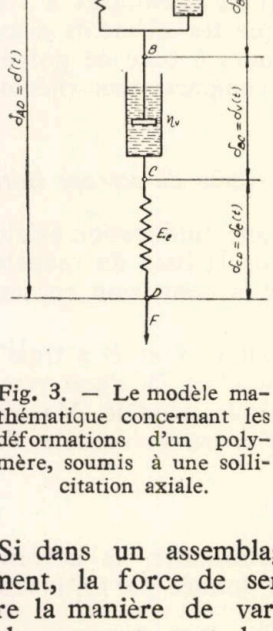


Fig. 3. — Le modèle mathématique concernant les déformations d'un polymère, soumis à une sollicitation axiale.

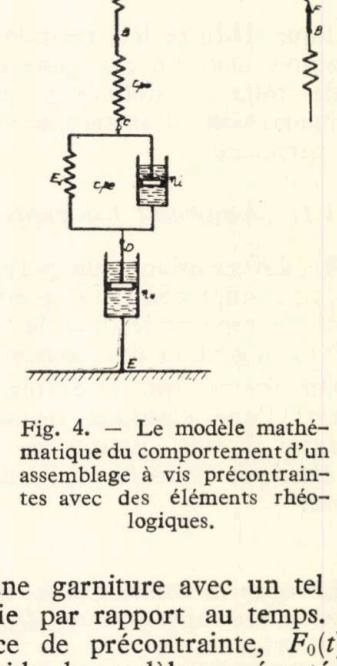


Fig. 4. — Le modèle mathématique du comportement d'un assemblage à vis précontraintes avec des éléments rhéologiques.

Si dans un assemblage à vis il y a une garniture avec un tel comportement, la force de serrage initial varie par rapport au temps. Pour déduire la manière de variation de la force de précontrainte, $F_0(t)$, on décrit le comportement de l'assemblage à l'aide du modèle représenté dans la fig. 4; sur la portion AB qui représente la vis, apparaîssent des déformations de compression (tandis qu'en réalité elles sont de traction), de même que sur la portion BE qui représente les éléments assemblés. Si au moment initial ($t = 0$) le système reçoit une déformation δ_0, dans l'as-

semblage apparaît la force F_0; parce qu'à ce moment il y a seulement des déformations élastiques instantanées, on peut écrire:

$$\delta_0 = \delta_{s0} + \delta_{p0}, \quad F_0 = \delta_{s0} c_s = \delta_{p0} c_{p0}. \tag{II.4}$$

Ensuite se développent les déformations visqueuses et élastiques retardées, de sorte qu'au moment t la somme de toutes les déformations reste constante à la valeur δ_0:

$$\delta_{s0}(t) + \delta_{e0}(t) + \delta_{i0}(t) + \delta_{v0}(t) = \delta_{s0} + \delta_{p0} = \delta_0. \tag{II.5}$$

Par conséquent la force F_0 baisse et au mement t atteint une valeur $F_0(t) \leqslant F_0$, comme indique la fig. 5.

En tenant compte de la relation (II.3) dans laquelle on considère

$$\sigma_0(t-s) = \frac{F_0(t-s)}{A_g} \quad \text{et} \quad \sigma_0(s) = \frac{F_0(s)}{A_g},$$

la relation (II.5) peut être écrite en fonction de $F_0(t)$ ainsi:

$$F_0(t)\left(\frac{1}{c_s} + \frac{1}{c_{p0}}\right) + \frac{l_g}{A_g \eta_i}\int_0^t F_0(t-s) e^{-\frac{E_i}{\eta_i} s}\, ds + \frac{l_p}{A_g \eta_v}\int_0^t F_0(s)\, ds = F_0\left(\frac{1}{c_s} + \frac{1}{c_{p0}}\right). \tag{II.6}$$

La relation (II.6) représente une équation intégrale par rapport à $F_0(t)$. Introduisant en (II.6) $t - s = u$ et en la dérivant deux fois par rapport à t, on obtient l'équation différentielle suivante de second degré, homogène, linéaire et avec des coefficients constants:

$$\frac{d^2F_0(t)}{dt^2} + \left[\frac{E_i}{\eta_i} + \frac{l_g F_0}{A_g \delta_0}\left(\frac{1}{\eta_i} + \frac{1}{\eta_v}\right)\right]\frac{dF_0(t)}{dt} + \frac{E_i l_g F_0}{A_g \delta_0 \eta_i \eta_v} F_0(t) = 0. \tag{II.7}$$

La solution de l'equation (II.7), et donc de (II.6), est immédiate:

$$F_0(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \tag{II.8}$$

où les exposants négatifs r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique, c'est-à-dire:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{E_i}{\eta_i} + \frac{l_g F_0}{A_g \delta_0}\left(\frac{1}{\eta_i} + \frac{1}{\eta_v}\right) \mp \sqrt{\left[\frac{E_i}{\eta_i} + \frac{l_g F_0}{A_g \delta_0}\left(\frac{1}{\eta_i} + \frac{1}{\eta_v}\right)\right]^2 - \frac{4E_i l_g F_0}{A_g \delta_0 \eta_i \eta_v}}\right] \tag{II.9}$$

et où les constantes d'intégration A et B se déterminent par la condition que la solution (II.8) satisfasse la première dérivée de l'équation (II.6) par rapport à t et avec la condition initiale $F_0(0) = F_0$; finalment il résulte:

$$(II.10) \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{r_1(F_0 l_g + A_g \delta_0 r_2 \eta_v)}{l_g(r_2 - r_1)}, \\ B = \dfrac{r_2(F_0 l_g + A_g \delta_0 r_1 \eta_v)}{l_g(r_2 - r_1)}. \end{cases}$$

Les relations (II.8) ... (II.10) indiquent la manière de variation de la force $F_0(t)$ par rapport au temps. On constate que $F_0(t)$ baisse exponentiellement avec le temps, en tendant asymptotiquement vers zéro ; pratiquement, après un intervalle de temps assez grand on peut considérer que la force de serrage $F_0(t)$ disparaît.

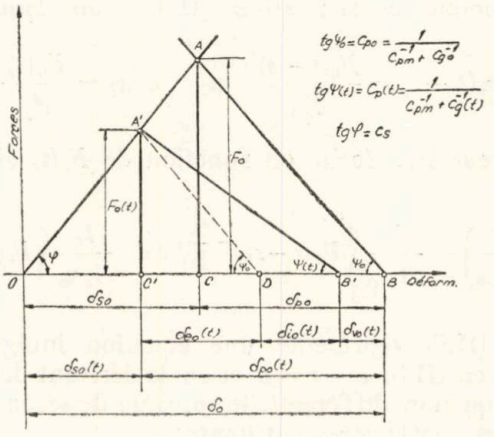


Fig. 5. — La modification du diagramme du serrage initial par rapport au temps à un assemblage avec des éléments rhéologiques.

En ce qui concerne le diagramme forces-déformations de l'assemblage (fig. 5) elle se modifie de OAB au moment initial ($t = 0$) à $OA'B'$ au moment t ; sur la figure sont mises en évidence toutes les déformations des éléments de l'assemblage au moment considéré, et aussi les forces F_0 et $F_0(t)$.

II.1.2. *Les relations fonctionnelles de l'assemblage*

On considère qu'au moment t, lorsque la force de serrage initial a la valeur donnée par les relations (II.8) ... (II.10) ou par la fig. 5, sur les tôles de l'assemblage on applique la force F. Il est nécessaire d'établir la force totale de vis, $F_s(\tau)$, ou la force $F_r(\tau)$ qui comprime les éléments assemblés à un moment quelconque $\tau \geqslant t$.

Pour déterminer ces forces on utilise le modèle représenté dans la fig. 4, en considérant que, sans modifier la déformation δ_0, dans le point B (en réalité sur les tôles extérieures) on applique la force F; une partie de la force F charge supplémentairement la vis mais le reste décharge les éléments assemblés. Au moment τ on peut écrire:

$$\delta_s(\tau) + \delta_e(\tau) + \delta_i(\tau) + \delta_v(\tau) = \delta_{s0}(t) + \delta_{e0}(t) + \delta_{i0}(t) + \delta_{v0}(t) = \delta_0, \tag{II.11}$$

les déformations $\delta_s(\tau)$, $\delta_e(\tau)$, $\delta_i(\tau)$, $\delta_v(\tau)$ peuvent être écrites en fonction de $F_s(\tau)$, ou de $F_r(\tau) = F_s(\tau) - F$, comme suit:

$$\begin{cases} \delta_s(\tau) = \dfrac{F_s(\tau)}{c_s}, \qquad \delta_e(\tau) = \dfrac{F_r(\tau)}{c_{p0}} = \dfrac{F_s(\tau) - F}{c_{p0}}, \\ \delta_i(\tau) = \dfrac{l_g}{A_g \eta_i}\left[\int_0^t F_0(t-s)e^{-\frac{E_i}{\eta_i}s}\,ds + \int_t^\tau [F_r(\tau - s) - F_0(t)]e^{-\frac{Ei}{\eta_i}s}\,ds\right] = \\ \qquad = \dfrac{l_g}{A_g \eta_i}\left[\int_0^t F_0(t-s)e^{-\frac{E_i}{\eta_i}s}\,ds + \int_t^\tau [F_s(\tau - s) - F - F_0(t)]e^{-\frac{E_i}{\eta_i}s}\,ds\right], \\ \delta_v(\tau) = \dfrac{l_g}{A_g \eta_v}\left[\int_0^t F_0(s)ds + \int_t^\tau F_r(s)ds\right] = \dfrac{l_g}{A_g \eta_v}\left[\int_0^t F_0(s)ds + \int_t^\tau [F_s(s) - F]\,ds\right]. \end{cases} \tag{II.12}$$

Introduisant les expressions (II.12) dans la relation (II.11) et en tenant compte de (II.6), il résulte l'équation intégrale suivante par rapport à $F_s(\tau)$:

$$\frac{\delta_0}{F_0}F_s(\tau) - \frac{F}{c_{p0}} + \frac{l_g}{A_g \eta_i}\int_t^\tau [F_s(\tau - s) - F - F_0(t)]\,e^{-\frac{E_i}{\eta_i}s}\,ds + \tag{II.13}$$

$$+ \frac{l_g}{A_g \eta_v}\int_t^\tau [F_s(s) - F]ds = \frac{\delta_0}{F_0}F_0(t).$$

On résout cette équation d'une manière similaire avec l'équation intégrale (II.6); en final on obtient la solution suivante:

$$F_s(\tau) = Ce^{r_1\tau} + De^{r_2\tau} + F, \tag{II.14}$$

où les exposantes r_1 et r_2 sont données par la relation (II.9); les constantes d'intégration C et D représentent la solution du système suivant d'équations algébriques:

$$\text{(II.15)} \quad \begin{cases} Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t} = F_0(t) - \dfrac{c_{po}}{c_s + c_{po}} F, \\ \dfrac{C}{r_1} e^{r_1 t} + \dfrac{D}{r_2} e^{r_2 t} = \dfrac{A_g \eta_v}{l_g c_s} F - \left[\dfrac{A_g \eta_v \delta_0}{F_0 l_g} + \dfrac{\eta_v}{E_i} \right] F_0(t). \end{cases}$$

On constate que la force $F_s(\tau)$ baisse en temps, en tendant asymptotiquement vers la valeur F, et simultanément $F_r(\tau)$ baisse, tendant vers zéro. Pratiquement, après un intervalle de temps $\tau - t$ assez grand, la force de compression des éléments assemblés, $F_r(\tau)$, disparaît et toute la charge extérieure F revient à la vis ($F_s(\tau) = F$).

Le diagramme caractéristique forces-déformations de l'assemblage est dans cette situation comme dans la fig. 6.

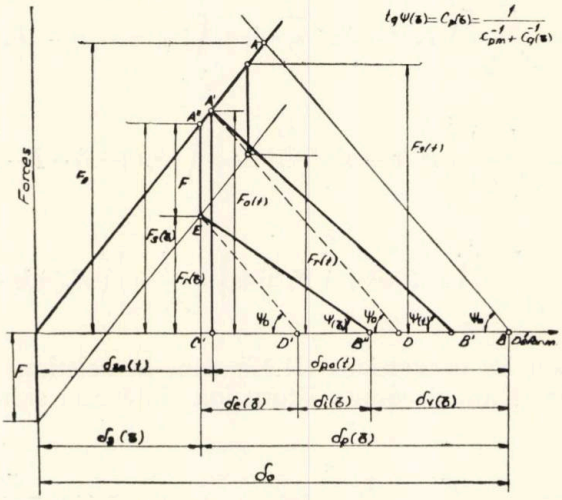


Fig. 6. — Le diagramme forces-déformations pour un assemblage avec des éléments rhéologiques.

On voit sur cette figure les forces $F_s(t)$ et $F_r(t)$ au moment t de l'application de la force F, aussi les forces $F_s(\tau)$ et $F_r(\tau)$ après l'application de F; parce que $F_s(\tau) < F_s(t)$ et $F_0(t) < F_0$, la vis doit être calculée à la traction avec la plus grande des forces $F_s(t)$ et F_0.

Le changement de la force de serrage initial et les relations fonctionnelles présentées au dessus dont valables dans le cas que la garniture a des déformations élastiques instantanées, élastiques retardées et visqueuses. En pratique il y a de nombreuses situations quand la garniture a un comportement plus simple dans le sens que quelques unes des composantes de la déformation totale sont négligeables. En ce qui suit on étudie le changement de la force de précontrainte et les relations fonctionnelles dans de tels cas particuliers.

II.2. Le cas des matériaux avec des déformations élastiques instantanées et élastiques retardées

Aux garnitures plastiques trouvées à la température habituelle, grâce à la forme particulière, caracterisée par une très petite épaisseur et par une grande surface et grâce à la sollicitation particulière de compression le glissement relatif des couches de macromolécules n'est pas favorisé ; par conséquent, on peut attendre une déformation visqueuse très réduite. Une série d'essais expérimentaux [11] ont confirmé ce phénomène, en constatant que, par voie tensiométrique éléctrique résistive, à la température habituelle, on ne peut pas saisir des déformations visqueses des garnitures, tandis que celles élastiques instantanées et retardées sont très grandes.

On peut donc afirmer qu'à la température ambiante, le comportement prédominant des garnitures à base de polymères est élastique instantané et élastique retardé.

Parce que dans cette situation n'apparaissent pas des déformations visqueuses, le comportement de l'assemblage est décrit par le modèle de la fig. 4, dans lequelle disparaît l'amortisseur visqueux η_v, ce qui revient à considérer que dans les équations déduites pour le cas général $\eta_v \to \infty$.

II.2.1. *Changement de la force de serrage initial par rapport au temps*

En conformité avec ce qui a été dit ci-dessus, le changement de la force de serrage initial (dans le cas de l'existence des garnitures plastiques soumisses à la température ambiante) est donné par la relation (II.8) dans laquelle les exposantes r_1 et r_2 et les constantes d'intégration A et B se déterminent de nouveau, en supposant $\eta_v \to \infty$. On trouve ainsi la relation suivante pour $F_0(t)$:

$$\frac{F_0(t)}{F_0} = \frac{\delta_0 A_g E_i}{F_0 l_g + \delta_0 A_g E_i} + \frac{F_0 l_g}{F_0 l_g + \delta_0 A_g E_i} e^{-\frac{F_0 l_g + \delta_0 A_g E_i}{A_g \delta_0 \eta_i}}, \tag{II.16}$$

qui montre que la force de serrage initial baisse en temps asymptotiquement vers une valeur de stabilisation F_{0e}; cette valeur s'obtient comme limite de la relation (II.16) pour $t \to \infty$:

$$\frac{F_{0e}}{F_0} = \frac{\delta_0 A_g E_i}{F_0 l_g + \delta_0 A_g E_i} = \frac{1}{1 + F_0/(\delta_0 c_{gi})}. \tag{II.17}$$

En tenant compte que pour $\delta_{v0}(t)=0$, δ_0 a l'expression

$$\delta_0 = F_0 \frac{c_s + c_{p0}}{c_s c_{p0}} = F_{oe} \frac{c_s + c_{pe}}{c_s c_{pe}}, \tag{II.18}$$

a relation (II.17) peut s'écrire plus comodement pour le calcul sous l'une des formes suivantes:

$$\frac{F_{0e}}{F_0} = \left[1 + \frac{c_s c_{p0}}{(c_s + c_{p0}) c_{gi}}\right]^{-1}, \tag{II.17'}$$

$$\frac{F_{0e}}{F_0} = 1 - \frac{c_s c_{pe}}{(c_s + c_{pe}) c_{gi}}, \tag{II.17''}$$

$$\frac{F_{0e}}{F_0} = 1 - \frac{n}{n+1} \frac{c_s c_{pe}}{(c_s + c_{pe}) c_g}. \tag{II.17'''}$$

Dans la fig. 7 sont représentées la variation de la force $F_0(t)$, (fig. 7*a*), et le changement correspondant du diagramme du serrage initial (fig. 7*b*).

On constate que, pratiquement, la valeur de stabilisation F_{0e} s'obtient après un intervalle de temps t_e relativement petit, dénommé temps de stabilisation. En considérant que t_e est la valeur du temps t pour laquelle la déformation élastique retardée $\delta_i(\tau)$ atteint un pourcentage K de sa valeur de stabilisation, il résulte :

$$t_e = -\frac{A_g\delta_0\eta_i}{F_0 l_g + \delta_0 A_g E_i}\ln\left(\frac{100}{100-K}\right)^{-1} = -\frac{\eta_i}{E_i}\frac{F_{0e}}{F_0}\ln\left(\frac{100}{100-K}\right)^{-1}, \tag{II.19}$$

où F_{0e}/F_0 a l'une des expressions (II.17) ... (II.17‴).

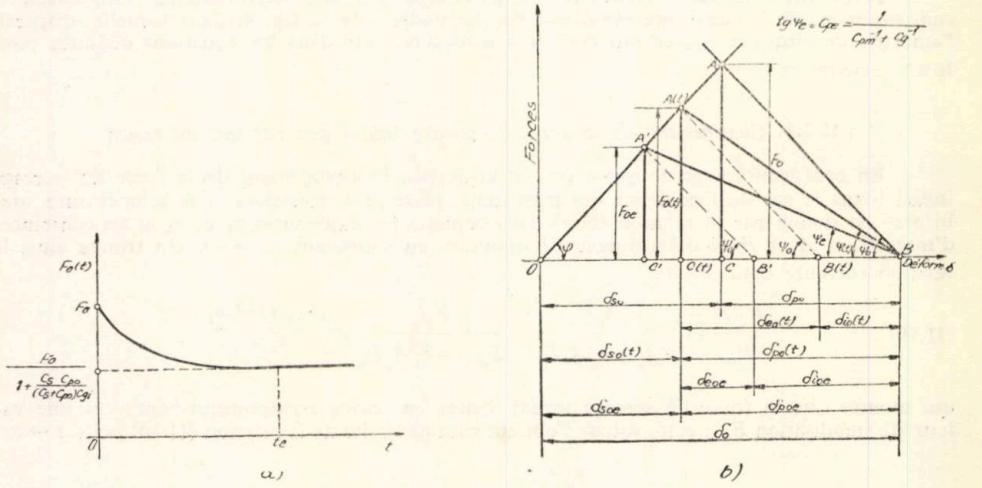


Fig. 7. — Le changement du serrage initial par rapport au temps à cause de l'élasticité retardée de la garniture ; *a*) variation pe la force $F_0(t)$; *b*) changement du diagramme du serrage initial.

Par exemple, si l'on accepte $K=95\,\%$, on obtient :

$$t_e = 3\frac{\eta_i}{E_i}\frac{F_{0e}}{F_0}. \tag{II.19'}$$

De la relation (II.19) résulte que le temps de stabilisation n'est pas seulement une caractéristique du matériel et de l'épaisseur de la garniture ; il dépend aussi des dimensions et des matériaux de l'assemblage, qui interviennent par c_s, c_{p0}, c_{pe}.

II.2.2. *Les relations fonctionnelles de l'assemblage*

La force $F_s(\tau)$ qui sollicite la vis après l'application de la force F s'obtient de la relation (II.14) dans laquelle les exposantes r_1 et r_2 et les constantes C et D se déterminent de nouveau, dans l'hypothèse que $\eta_v \to \infty$. Finalment on obtient la relation :

$$(II.20).\quad F_s(\tau)=F_0(t)+\frac{c_s}{c_s+c_{pe}}F-\left[\frac{c_{p0}}{c_s+c_{p0}}-\frac{c_{pe}}{c_s+c_{pe}}\right]Fe^{-\frac{E_i}{\eta_i}\left[1+\frac{F_0}{\delta_0 c_{gi}}\right](\tau-t)}.$$

On constate que la force $F_s(\tau)$ croît en temps depuis la valeur $F_s(t)$,

$$(II.21)\qquad F_s(t)=F_o(t)+\frac{c_s}{c_s+c_{po}}F$$

au moment de l'application de la force F, $(\tau=t)$, et tend asymtotiquement vers une valeur de stabilisation F_{set}, donnée par la relation :

$$(II.22)\qquad F_{set}=F_0(t)+\frac{c_s}{c_s+c_{pe}}F,$$

où $F_0(t)$ a l'expressions (II.16).

Pratiquement $F_s(\tau)$ atteint sa valeur de stabilisation F_{set} au moment $\tau=t+t_e$, comme on peut constater des fig. 8 *a* et 9 *a*.

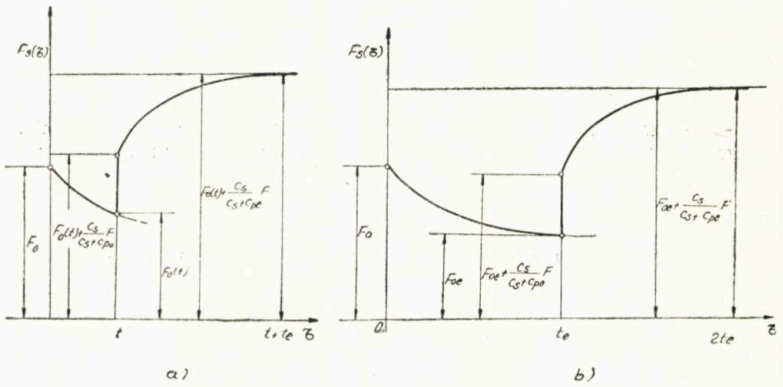


Fig. 8. — Le processus transitoire de la force $F_s(\tau)$ dans le cas que l'un des éléments assemblés a des déformations élastiques instantanées et retardées : *a*) la force F s'applique avant la stabilisation de la force $F_0(t)$; *b*) la force F s'applique après la stabilisation de la force $F_0(t)$.

En cas que la force F s'applique après la stabilisation de la force $F_0(t)$, donc au moment $t\geqslant t_e$, les relations (II.22) et (II.21) deviennent :

$$(II.21')\qquad F_s(t)=F_{0e}+\frac{c_s}{c_s+c_{p0}}F,$$

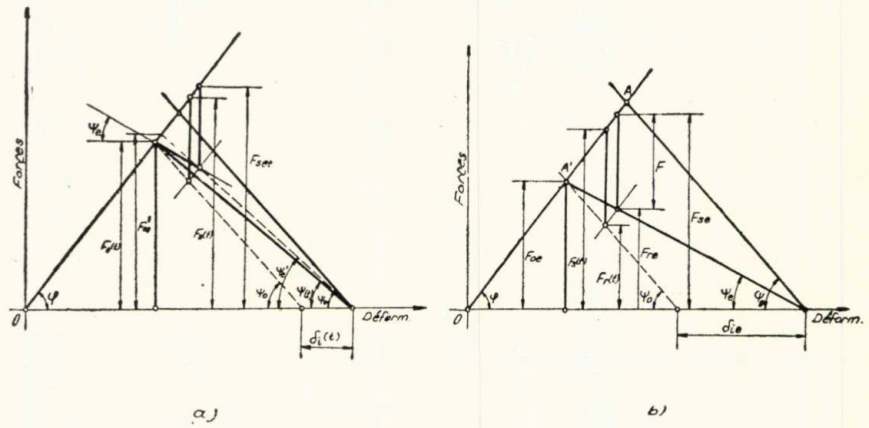
$$(II.21'')\qquad F_{se}=F_{0e}+\frac{c_s}{c_s+c_{pe}}F,$$

où la force F_{0e} se calcule avec l'une des relations (II.17) ... (II.17‴).

Le processus transitoire de la force $F(\tau)$ dans ce cas est représenté dans la fig. 8 *b*, tandis que le changement du diagramme fonctionnel est représenté dans la fig. 9*b*.

En ce qui concerne la force remanente dans les éléments assemblés, $F_r(\tau)$, elle est toujours donnée par l'expression :

(II.23) $$F_r(\tau)=F_s(\tau)-F.$$



a) b)

Fig. 9. — Le diagramme forces-déformations de l'assemblage quand l'un des éléments assemblés a des déformations élastiques instantanées et retardées : *a*), *b*) comme dans la fig. 8.

Cette force a la valeur minime au moment de l'application de la force F :

(II.24) $$F_r(t)=F_0(t)-\frac{c_{p0}}{c_s+c_{p0}}F,$$

(II.24′) $$F_{re}(t)=F_{0e}-\frac{c_{p0}}{c_s+c_{p0}}F,$$

et la valeur maxima en régime stabilisé :

(II.25) $$F_{ret}(t)=F_0(t)-\frac{c_{pe}}{c_s+c_{pe}}F,$$

(II.25′) $$F_{re}=F_{0e}-\frac{c_{pe}}{c_s+c_{pe}}F.$$

Pour assurer l'étanchéité, en calcul on considérer la force $F_r(t)$, tandis que pour le calcul de la vis on doit considérer la force F_{se} ou F_{set}.

II.3. Le cas des matériaux avec des déformations élastiques instantanées et visqueuses

En cas que pour un matériel les déformations élastiques retardées peuvent être négligées par rapport aux autres déformations, le comportement de l'assemblage ayant une garniture de tel matériel s'apprécie avec les relations générales déduites dans le § **II.1**, en considerant que $\eta_i \to \infty$.

Le modèle correspondant s'obtiennt en éliminant le modèle Voight (η_i, E_i) de la fig. 4.

II.3.1. *Changement de la force de serrage initial par rapport au temps*

Le changement de la force de serrage initial par rapport au temps dans un assemblage avec des déformations élastiques instantanées et visqueuses est donné par la relation générale (II.8); les exposantes r_1 et r_2 et les constantes d'integration A et B se déterminent de nouveau pour $\eta_i \to \infty$. Finalment il résulte :

$$F_0(t) = F_0 e^{-\frac{l_g c_s c_{p0}}{A_g \eta_v (c_s + c_{p0})} t}. \tag{II.26}$$

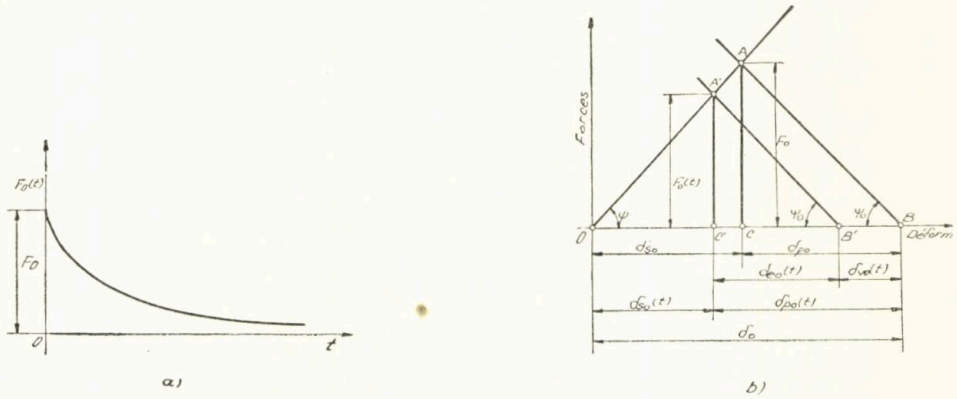


Fig. 10. — Le changement de la force de serrage initial en temps à cause des déformations visqueuses : *a*) variation de la force $F_0(t)$; *b*) modification du diagramme du serrage initial.

La force de serrage initial baisse exponentiellement, en tendant vers zéro, comme on peut constater de la fig. 10 *a*. Dans la fig. 10 *b* est représentée la modification du diagramme du serrage initial à cause des déformations visqueuses. On peut remarquer que la rigidité des éléments assemblés reste constante par rapport au temps, mais la déformation totale δ_0 baisse avec la déformation visqueuse.

II.3.2. *Les relations fonctionnelles de l'assemblage*

Après l'application de la force F, la force de la vis $F_s(\tau)$ est donnée par la relation (II.14) dans les cas $\eta_i \to \infty$, en obtenant :

$$F_s(\tau) = F + \left[F_0(t) - \frac{c_{p0}}{c_s + c_{p0}} F \right] e^{-\frac{l_g c_s c_{p0}}{A_g \eta_v (c_s + c_{p0})} (\tau - t)} \tag{II.27}$$

et

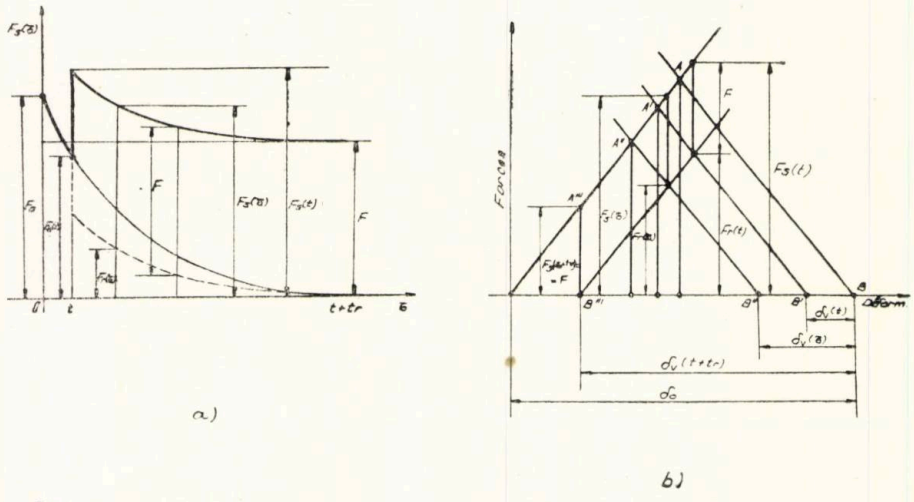
$$F_r(\tau) = F_s(\tau) - F = \left[F_0(t) - \frac{c_{p0}}{c_s + c_{p0}} F \right] e^{-\frac{l_g c_s c_{p0}}{A_g \eta_v (c_s + c_{p0})} (\tau - t)}. \tag{II.28}$$

La force de la vis, $F_s(\tau)$, baisse asymptotiquement vers la valeur de la force F, tandis que la force remanente $F_r(\tau)$ baisse asymptotiquement vers zéro. On peut déterminer le temps de relaxation, t_r, aprés lequel la force $F_r(\tau)$ atteint $K\%$ de sa valeur initiale :

$$t_r = -\frac{A_g \eta_v (c_s + c_{p0})}{l_g c_s c_{p0}} \ln \frac{100}{K}. \tag{II.29}$$

Pour $K = 5\%$ il résulte :

$$t_r = 3 \frac{A_g \eta_v (c_s + c_{p0})}{l_g c_s c_{p0}}. \tag{II.29'}$$



a) b)

Fig. 11. — Le changement des forces de l'assemblage à cause des déformations visqueuses des éléments assemblés : *a*) processus transitoire ; *b*) diagramme forces-déformations.

Pratiquement on peut considérer qu'au moment $\tau = t + t_r$ les forces $F_0(\tau)$ et $F_r(\tau)$ sont nulles et la force $F_s(\tau)$ devient egale à la force F.

Le processus transitoire des forces de l'assemblage et représenté dans la fig. 11 *a*, tandis que le changement du diagramme forces-déformations — dans la fig. 11.*b*.

II.4. Le cas des matériaux avec des déformations élastiques instantanées

Un autre cas qu'intéresse la pratique est celui de l'assemblage des tôles métalliques à température ambiante (sans garnitures rhéologiques) qui ont seulement des déformations élastiques instantanées.

Le modèle de l'assemblage s'obtient en éliminant de la fig. 4 le modèle Voight (η_i, E_i) et l'amortisseur η_v.

En considérant que dans les relations générales déduides au § **II. 1** $\eta_i \to \infty$ et $\eta_v \to$ $\to \infty$ résulte que la force de serage initial reste constante:

(II.30) $$F_0(t) = F_0$$

et que les relations fonctionnelles de l'assemblage sont celles connues de la littérature de specialité, en cas que les rigidités c_s, c_p sont bien détérminées.

Le diagramme forces-déformations est représenté dans ce cas dans la fig. 1.

La seconde partie de cet étude sera consacré au résultats experimentaux et à l'analyse de la methode de calcul présentée.

Reçue le 15 april 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanismes et
de Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Биргер И. А., *Расрёт ревьдовых соединении.* Оборонгиз, М., 1959.
2. Биргер И. А., *Определение податливости промежуточьных деталей резьдового соединения.* Вестник машиностроения, *5* (1961).
3. Данилов В. К., *Экспериментальное определение податливости фланцев на сжатие.* Вестник машиностроения, *6* (1959).
4. Dreger H., *Vereinfachte Berechnung vorgespannter Schrauben.* Konstruktion, *8* (1965).
5. Виткуп Е. Б., *Упругие деформации в напряжённых разёмных соединениях.* Вестник машиностроения, *5* (1961).
6. Wiegand H., Illgner K. H., Beelich K. N., *Einfluss der Federkonstanten und der Anzugsbedingungen auf die Vorspannung von Schraubenverbindungen.* Konstruktion, *4* (1968).
7. Junker G., Strelow D., *Untersuchungen über die Mechanik des selbsttätigen Lösens und die Zweckmässige Sicherung von Schraubenverbindungen* (I), (II). Draht-Welt, *52*, *2*, *3* (1966).
8. Gafiţanu M. D., *Contribuţii la studiul capacităţii portante a angrenajelor cu roţi dinţate cilindrice din poliamidă pe roţi dinţate din oţel, cu considerarea influenţei modulului, a numărului de dinţi şi a unghiului de înclinare a dinţilor.* Teză de doctorat, Bucureşti, 1968.
9. Feltham P., *Deformation and Strenght of Materials.* Butterworths, London, 1966.
10. Ferry J. A., *Viscoelastic Properties of Polymers.* New York—London, 1961.
11. Popinceanu N. G., Diaconescu E. N., *Contribuţii privind comportarea garniturilor plastice în îmbinările cu şuruburi.* Mase plastice (sous presse).
12. Popinceanu N. G., Diaconescu E. N., *Contribuţii privind repartiţia tensiunilor de compresiune la calculul rigidităţii pachetului la îmbinări cu şuruburi cu strîngere iniţială.* Construcţia de maşini (sous presse).

CONTRIBUŢII LA CALCULUL ÎMBINĂRILOR CU ŞURUBURI CU STRÎNGERE INIŢIALĂ PE BAZĂ DE CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE

I. Studiu teoretic privind comportarea îmbinărilor cu şuruburi cu strîngere iniţială, cu garnituri reologice

(Rezumat)

Se prezintă mai întîi modul actual de calcul al îmbinărllor cu şuruburi cu strîngere iniţială şi se arată caracterul său limitat şi imprecis în aprecierea fenomenelor.

Se deduce apoi expresia analitică a modificării forţei de strîngere iniţială în timp, precum şi a repartiţiei forţei exterioare în timp pe elementele îmbinării, în cazul cînd unul din elementele îmbinate are o comportare reologică generală, cu deformaţii elastice instantanee, elastice întîrziate şi vîscoase. În final se particularizează aceste expresii analitice în cîteva cazuri particulare, cînd una sau două din cele trei componente ale deformaţiei totale se pot neglija.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.D. 621.822.7

CONTRIBUTIONS CONCERNANT LA DURABILITÉ DE VIE ET LE TAUX DYNAMIQUE DE BASE DES ROULEMENTS RADIAUX À MOUVEMENT OSCILLANT [1)]

Note I
RELATION GÉNÉRALE DE CALCUL DE LA DURABILITÉ DE VIE ET DU TAUX DYNAMIQUE DE BASE

PAR

L. T. HOSTIUC

1. Introduction

En ce qui suit on présente une méthode de calcul des roulements radiaux à mouvement oscillant, basée sur la méthode Lundberg—Palmgren [2], [3] pour le calcul des roulements à mouvement de rotation. Dans les relations de calcul qui y sont proposées on prend en considération les particularités spécifiques du mouvement d'oscillation d'un roulement radial [1].

2. Relation générale de la durabilité de vie des roulements à mouvement oscillant [2)]

On admet les hypothèses de Lundberg et Weibull suivant lesquelles a lieu la relation :

$$\log \frac{1}{S} \sim \frac{\tau_0^c N^e a l_s}{z_0^{h-1}}, \tag{1.1}$$

où S est la probabilité de résistance à la fatigue de contact de roulement du roulement; τ_0—l'effort tangentiel orthogonal maximal qui se développe

1) Présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 2—4 juillet 1970.
2) On utilise les mêmes notations que dans [1].

sous la george de roulement de l'élément sollicité; c, h, e — exposants constants et positifs; N — le nombre total de cycles de sollicitation dans le contact de roulement des éléments du roulement; a — semiaxe grande de l'ellipse de contact entre le corps de roulage et l'anneau respectif; l_s — longuer sollicitée en contact de roulement; z_0 — profondeur sous la gorge de roulement pour laquelle apparaît l'effort tangentiel orthogonal maximal.

On admet aussi les hypothèses de Hertz et Lundberg conformément auxquelles:

$$(1.2)\quad \begin{cases} q=\dfrac{3Q}{2\pi ab}, & E_0=\dfrac{m^2E}{m^2-1}, & T=\dfrac{\sqrt{2t-1}}{2t(t+1)}, \\ a=\mu\sqrt[3]{\dfrac{3Q}{E_0\Sigma\rho}}, & N=uL_{0s}, \quad \tau_0=Tq, & \dfrac{b}{a}=\sqrt{(t^2-1)(2t-1)}, \\ b=\nu\sqrt[3]{\dfrac{3Q}{E_0\Sigma\rho}}, & ab=\mu\nu^2\dfrac{3Q}{E_0\Sigma\rho}, & z_0=\zeta b,\ \zeta=\dfrac{1}{(t+1)\sqrt{2t-1}}, \end{cases}$$

avec q — pression au centre de l'éllipse de contact, b — simi-axe petite de l'ellipse de contact, Q-charge normale sur le corps de roulage, E — module d'élasticité du matériel des corps en contact (acier), m — coefficient de Poisson, u — nombre des cycles qe sollicitation dans une période d'oscillation de l'élément pris en considération, L — durabilité de vie, en millions d'oscillations.

Les relations (1.2) sont valables pour le contact initial ponctuel des éléments du roulement.

Si on introduit les relations (1.2) dans (1.1) on obtient:

$$(1.3)\quad \log\frac{1}{S}\sim\frac{T^c}{\zeta^{h-1}\mu^{c-1}\nu^{c+h-1}}\left[\frac{E_0D_k\Sigma\rho}{3}\right]^{\frac{2c+h-2}{3}}\left(\frac{Q}{D_k^2}\right)^{\frac{c-h+2}{3}}l_sD_k^{2-h}u_eL_{0s}^e.$$

On peut considérer [2] le contact initial linéaire entre les éléments du roulement comme un contact ponctuel avec:

$$(1.4)\qquad 2a=1{,}5\,l_r,$$

où l_r est la longuer de contact du rouleau avec la gorge de roulement.

Dans le cas du contact initial linéaire, pour $b/a\to 0$, (1.3) devient:

$$(1.5)\qquad \log\frac{1}{S}\sim\frac{T_0^c}{\zeta_0^{h-1}}\left[\frac{\pi E_0D_k\Sigma\rho}{6}\right]^{\frac{c+h-1}{2}}\left(\frac{4D_k}{3l_r}\right)^{\frac{c-h-1}{2}}l_sD_k^{2-h}u^eL_{0s}^e,$$

où T_0 et ζ_0 sont les valeurs T et ζ pour $b/a=0$.

On peut noter dans les relations (1.3) et (1.5):

a) pour contact initial ponctuel:

$$\frac{Q}{D_k^2} L_{0s}^{\frac{3e}{c-h+2}} = A_1 \Phi D_k^{-\frac{3(3-h)}{c-h+2}}; \tag{1.6}$$

b) pour contact initial linéaire:

$$\frac{Q}{D_k^2} L_{0s}^{\frac{2e}{c-h+1}} = B_1 \Psi D_k^{-\frac{c-3h+5}{c-h+1}} l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}}, \tag{1.7}$$

avec

$$\begin{cases} \Phi = \left[\left(\dfrac{T}{T_1} \right)^c \left(\dfrac{\zeta_1}{\zeta} \right)^{h-1} \dfrac{(D_k \Sigma \rho)^{\frac{2c+h-2}{3}}}{\mu^{c-1} \nu^{c+h-1}} l_s \dfrac{1}{D_k} u^e \right]^{-\frac{3}{c-h+2}}, \\ \Psi = \left[(D_k \Sigma \rho)^{\frac{c+h-1}{2}} l_s \dfrac{1}{D_k} u^e \right]^{-\frac{2}{c-h+1}}, \end{cases} \tag{1.8}$$

T_1 et ζ_1 étant les valeurs T et ζ pour $b/a=1$ et A_1, B_1 — des constantes dépendant du matériel.

On définit le taux dynamique de base d'un roulement à mouvement oscillant C_{0s}, par la charge purement radiale, appliquée à l'anneau intérieur oscillant pendant un million d'oscillations, $L_{0s}=1$, avec une angle d'oscillation constant, pour lequel 90 % des roulements d'un lot essayés dans ces conditions ne s'usent pas à cause de la fatigue de contact.

On designe par Q_c la charge sur un corps de roulage, quand le chargement extérieur est égal au taux dynamique de base du roulement.

Pour $L_{0s}=1$ les relations (1.6) et (1.7) deviennent:

a) pour contact initial ponctuel:

$$Q_c = A_1 \Phi D_k^{\frac{2c+h-5}{c-h+2}}; \tag{1.9}$$

b) pour contact initial linéaire:

$$Q_c = B_1 \Psi D_k^{\frac{c+h-3}{c-h+1}} l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}}. \tag{1.10}$$

En divisant les relations (1.9) par (1.6), respectivement (1.10) par (1.7), il en résulte:

a) pour contact initial ponctuel:

$$L_{0s} = \left(\frac{Q_c}{Q} \right)^{\frac{c-h+2}{3e}}; \tag{1.11}$$

b) pour contact initial linéaire :

$$L_{0s} = \left(\frac{Q_c}{Q}\right)^{\frac{c-h+1}{2e}}. \tag{1.12}$$

Parce que $C_{0s} \sim Q_c$ et $F \sim Q$ les relations (1.11) et (1.12) deviennent :

$$L_{0s} = \left(\frac{C_{0s}}{F}\right)^{p}, \tag{1.13}$$

où

a) pour contact initial ponctuel :

$$p = \frac{c-h+2}{3e}; \tag{1.14}$$

b) pour contact initial linéaire :

$$p = \frac{c-h+1}{2e}, \tag{1.15}$$

avec F — la charge extérieure radiale qui sollicite le roulement en mouvement d'oscillation.

La relation (1.13) est vraie pour tout angle d'oscillation θ et elle est analogue, quant à sa forme, à la relation des catalogues de roulements.

3. Relation générale de calcul du taux dynamique de base

Dans [1] on a présenté la relation générale de calcul du taux dynamique de base d'un roulement radial :

$$\frac{1}{C_{0s}^{w}} = \frac{1}{C_{i}^{w}} + \frac{1}{C_{e}^{w}} + \sum_{j=1}^{Z_p} \frac{1}{C_{kj}^{w}}. \tag{1.16}$$

On considère comme elément de force qui mène à la destruction des anneaux et des corps de roulage portants par la fatigue de contact, la charge moyenne répartie sur les anneaux du roulement [2].

Si l'on néglige le glissement entre les corps de roulage et l'anneau intérieur, la charge moyenne sollicite également tous les corps de roulage ; par conséquent on avance l'hypothèse que les probabilités de résistance S_k des Z_p corps de roulage portants sont égales entre elles, donc on peut poser :

$$S_p = S_k^{Z_p}. \tag{1.17}$$

La relation (1.16) devient maintenant:

$$\frac{1}{C_{0s}^{w}} = \frac{1}{C_i^{w}} + \frac{1}{C_e^{w}} + Z_p \frac{1}{C_k^{w}}, \tag{1.18}$$

où C_k est le taux dynamique de base d'un corps de roulage portant.

La relation (1.18) peut être écrit aussi:

$$C_{0s} = \left[1 + \left(\frac{C_i}{C_e}\right)^{w} + Z_p \left(\frac{C_i}{C_k}\right)^{w}\right]^{-1/w} C_i. \tag{1.19}$$

4. Relation générale de calcul du taux dynamique de base C_i, C_e, C_k

La chage extérieure radiale, pour un roulement radial à une seule rangée de corps de roulage, peut être exprimé par, [2]:

$$\begin{cases} F_r = \Sigma Q(\psi) \cos\alpha \cos\psi \simeq Z Q_{\max} \cos\alpha \mathcal{J}_r, \text{ avec} \\ \mathcal{J}_r = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos\psi)\right]^{t} \cos\psi \, d\psi, \end{cases} \tag{1.20}$$

où $t=3/2$ pour les roulements à billes et $t=1{,}1$ pour roulements à rouleaux [3].

Les valeurs des intégrales $\mathcal{J}_r$ sont donées dans [2, tableau 3].

La charge moyenne qui sollicite les éléments du roulement quand le chargement extérieur radial F_r est egal au taux dynamique de base de l'élément respectif, est acceptée d'être [2]:

$$\begin{cases} Q_c = \sqrt[w]{\dfrac{1}{2\psi_0} \displaystyle\int_{+\psi_0}^{-\psi_0} Q^{w}(\psi) d\psi} = Q_{\max} \mathcal{J}_m, \text{ avec} \\ \mathcal{J}_m = \sqrt[w]{\dfrac{1}{2\psi_0} \displaystyle\int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \cos\psi)\right]^{tw} d\psi}. \end{cases} \tag{1.21}$$

La relation (1.20) peut prendre la forme:

$$C = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_m} Q_c Z \cos\alpha. \tag{1.22}$$

En utilisant Q_c donnée par les relations (1.9) et (1.10) on obtient:

a) pour contact initial ponctuel:

$$C = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_m} A_1 \Phi D_k^{\frac{2c+h-5}{c-h+2}} Z \cos\alpha; \tag{1.23 a}$$

b) pour contact initial linéaire:

$$C = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_m} B_1 \Psi D_k^{\frac{c+h-3}{c-h+1}} l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}} \cos\alpha. \tag{1.23 b}$$

On avance l'hypothèse que le diamètre des corps de roulage a la même influence sur la durabilité de vie du roulement en mouvement oscillant que dans le cas du mouvement de rotation. Donc [2] on a:

a) pour roulements à billes:

$$\frac{2c+h-5}{c-h+2} = 1{,}8; \tag{1.24 a}$$

b) pour roulements à rouleaux:

$$\frac{c+h-3}{c-h+1} = 1{,}07. \tag{1.24 b}$$

Quand les roulements radiaux à billes et à rouleaux ont un nombre i de rangées de corps de roulage, le taux dynamique de base de chaque élément à part est affectée [2] du facteur $i^{1-1/w}$.

Les relations (1.23) deviennent maintenant:

a) pour roulements à billes:

$$C = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_m} A_1 \Phi D_k^{1,8} i^{1-1/w} Z \cos\alpha; \tag{1.25 a}$$

b) pour roulements à rouleaux:

$$C = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_m} B_1 \Psi D_k^{1,07} i^{1-1/w} l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}} Z \cos\alpha. \tag{1.25 b}$$

Dans les relations (1.25) le facteur qui dépend de l'angle d'oscillation est Φ pour les roulements à billes, respectivement Ψ pour les roulements à rouleaux.

Dans [1] on a montré que pour les roulements radiaux a lieu la relation:

$$\theta_{cri} < \theta_{crk} < \theta_{cre}. \tag{1.26}$$

Le mouvement d'oscillation d'un roulement radial, rapporté à (1.26), peut se diviser en quatre cas possibles:

$$(1.27)\quad \begin{aligned} &1) \quad \theta < \theta_{cri};\\ &2) \quad \theta_{cri} \leqslant \theta < \theta_{crk};\\ &3) \quad \theta_{crk} \leqslant \theta < \theta_{cre};\\ &4) \quad \theta \geqslant \theta_{cre}. \end{aligned}$$

Pour chaucun des cas possibles d'oscillation les expressions Φ, respectivement Ψ, auront autre valeur, donc il existeront 4 relations de calcul derivées de (1.19) pour $\theta \gtrless \theta_{cr}$.

Dans la seconde partie de cet ouvrage on va présenter la solution du cas $\theta < \theta_{cri}$. En principe, les autres cas possibles d'oscillation se résolvent de la même manière.

Reçue le 18 juillet 1970

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanismes et de
Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Popinceanu N., Hostiuc L., *Particularités du comportement des roulements à mouvement oscillant.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII(XXI)**, *1—2*, s. IV (1971).
2. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Rolling Bearings.* Acta Polytechnica, Stockholm, Mech. Eng., ser. 1, *3*, *7* (1947).
3. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Roller Bearings.* Acta Polytechnica, Stockholm, Mech. Eng., ser 2, *4*, *96* (1952)
4. Rumbarger J. H., Jones A. B., *Dynamic Capacity of Oscillating Rolling Element Bearings.* J. of Lubrications Techn., ASME, **90** *F* (January 1968).
5. Haris T. A., *Rolling Bearing Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1968.

CONTRIBUȚII PRIVIND DURABILITATEA ȘI CAPACITATEA DINAMICĂ DE BAZĂ A RULMENȚILOR RADIALI CU MIȘCARE DE OSCILAȚIE

Nota I

Relații generale de calcul pentru durabilitatea și capacitatea dinamică de bază

(Rezumat)

Pe baza teoriei Lundberg—Palmgren a rulmenților cu mișcare de rotație, se prezintă relațiile generale de calcul pentru durabilitatea și capacitatea dinamică de bază a rulmenților radiali cu mișcare de oscilație.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. Z. 621.9–4 ; 620.193

DER EINFLUSS DER OBERFLÄCHLICHEN KUGELHÄRTUNG, AUF DEN KORROSIONSWIEDERSTAND DER STÄHLE [1])

VON

C. PICOŞ, ADRIAN CIRILLO, GH. COMAN und V. BRAHA

1. Vorwort

Die Korrosion ist ein Oxydationsergebniss, welches sich durch folgendes äussert: chemische Korrosion (eine durch Säuren und Basis erzeugte Korrosion), Gaskorrosion und elektrochemische Korrosion.

Die analyse der Faktoren welche die Intensität des Korrosionsvorgangs der Metalle beeinflüssen und die Feststellung der Korrosionsschutzmethoden stellen eine grosse Bedeutung dar, da nach einigen Abschätzungen [2] etwa 10% der Weltproduktion der Metalle „gehen gänzlich verloren unter dem Korrosionsvorgang der Umgebung".

Die Forschung der Korrosionserscheinung der Stähle und die Feststellung ihren Bekämpfungsmethoden, haben viele Forscher beschäftigt. Die betreffenden Forschungen zeichnen die Faktoren die den Charakter und die Korrosionsgeschwindigkeit der Stähle beeinflüssen aus die Zusammensetzung des Stahles; das Wesenund Konzentration des Korrosionsmediums; die Art der Stahlbearbeitung (Kalt- oder Warmbearbeitung); die bearbeitete Oberflächenbeschaffenheit; usw.

Betreffs dem Korrosionsschutz der Stähle, beziehen sich die Forschungen besonders auf die Stahlbereitung mit hohem Korrosionswiderstand, der Antikorrosionsüberzug der Stähle und die Steigerung des Korrosionswiderstandes durch thermische- und thermochemische Behandlung.

Die Einfluss der oberflächlichen mechanischen Behandlungen auf den Korrosionswiderstand der Stähle war verhältnismässig wenig einstudiert. In einigen Forschungen [4] wird erwähnt dass durch Kalthärtung der Korro-

---

[1]) Mittgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy, am 28. – 30. September 1967.

sionswiderstand des Stahles wächst, und aus anderen [3], geht hervor dass die statische Zugspannung eine ungünstige Wirkung auf den Korrosionswiderstand haben, während die Druckspannung verbessern den Korrosionswiderstand der Stähle; diese statischen Spannungen können von äusseren Beanspruchungen (mechanischen) oder von den zurückgebliebenen Spannungen die die thermischen Behandlungen hervorrufen, verursacht sein. In [7] zeigt sich dass die Kalthärtung zu einer Steigerung der Dauerfestigkeit in einem Korrosionsmedium führt, und aus [8] geht hervor dass die Korrosionsgeschwindigkeit verhältnismässig mit dem Vervormungsgrad der Oberflächenschicht wächst.

Aus dem obigen geht hervor, dass das Studium des Einflusses der mechanischen oberflächlichen Behandlungen auf die Stahlkorrosion, ein aktuelles Problem ist und das seine Vorschung sich mit Notwendigkeit vorschreibt, da diese Behandlungen sich weit in den Herstellungstechnologien der Maschinenelemente ausdehnen, infolge der guten Ergebnisse die erzielt werden bezüglich der Dauer- und Verschleissfestigkeit.

2. Die ausgeführten Untersuchungen und die erhaltenen Ergebnisse

Durch die ausgeführten Untersuchungen haben wir den Einfluss der mit Kugeln Oberflächenhärtung auf den Korrosionswiderstand des Kohlenstoffstähles: OLC 45 (STAS 880—66) verfolgt.

Für die Versuche haben wir zylindrische Probekörper mit einem Durchmesser von 10 mm und einer Länge von 80 mm, folglich mit einer Gesamtoberfläche von 2659 mm². Die Probekörper sind aus gewalzten Stabstählen in geglühtem Zustand durch Drehen auf einer SN—400 Drehbank erlangt. Beim letzten Drehstich sind folgende Bearbeitungsparameter verwendet worden: Vorschub $s = 0{,}1$ mm/dr; Schnittiefe $t = 1$ mm und Schnittgeschwindigkeit $v = 18$ m/min.

Die Oberflächenhärtung ist durch eine früher vorgezeigte Methode [5], mit einer Konstanten Geschwindigkeit $v_r = 18$ m/min, durchgefürt worden. Für eine Veränderung des Härtegrades hat man auf folgende Parameter gewirkt: Einwalzkraft und Stichzahl der Kugel auf die entsprechende Oberfläche.

Um den Korrosionswiderstand zu bestimmen hat man die langsam sukzessiv Imersionsmethode [1] verwendet, und für das Abschätzen hat man die Gewichtsverlust-Methode [2] mit einer Genauzkeit von $9{,}81 \cdot 10^{-6}$ N (0,001 gf) benützt. Als Korrosionsmedium hat man eine Lösung von 3% NaCl, gleichwertig dem Meereswasser bei einer Temperatur von 293,16° K $\pm$ $\pm$ 2° K (20 °C $\pm$ 2°C) benützt; als Versuchszeit im Korrosionsmedium hat man 10 Tage [1] betrachtet.

Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in Tabelle 1 enthalten und in Abb. 1 und 2 dargestellt. Als Ergebnis einer Abmessung hat man das arithmetische Mittel von 5 erhaltenen Gewichtsverlustbestimmungen genommen.

Tabelle 1

Seriennummer der Probekörper	Einwalzkraft P N	Einwalzvorschub s_r mm/dr	Durchgangszahl n_{tr}	Durchschnittlicher Gewichtsverlust g . 10^{-3} N
1	—	—	—	8,75
2	200	0,10	1	8,70
3	300	0,10	1	8,42
4	400	0,10	1	7,45
5	500	0,10	1	6,65
6	600	0,10	1	6,12
7	200	0,10	2	8,69
8	200	0,10	3	8,58
9	200	0,10	4	8,45
10	300	0,10	2	8,12
11	300	0,10	3	7,83
12	300	0,10	4	7,55
13	400	0,10	2	6,84
14	400	0,10	3	6,37
15	400	0,10	4	5,90
16	500	0,10	2	5,19
17	500	0,10	3	4,83
18	500	0,10	4	4,63
19	600	0,10	2	4,20
20	600	0,10	3	3,95
21	600	0,10	4	3,80

3. Schlussfolgerungen

Aus den Tabelle 1, Abb. 1 und 2 vorgeführten Daten, die aus den durchgeführten Untersuchungen erhalten sind, geht hervor dass der Korrosionswiderstand des OLC 45—Stahles mit zunehmendem Oberflächenhärtegrad steigt.

1. Der Korrosionswiderstand, für gleiche Einwalzkräfte, verändert sich ungefür verhältnismässig mit der Stichzahl, weil der Stärkewert und Härtegrad von diesem Faktor direkt beeinflusst sind.

2. Der Korrosionswiderstand wächst, in den verwendeten Einwalzkraftgrenzen (200...600 N), ungefähr verhältnismässig mit deren Werten.

3. Das Ansteigen der Einwalzkraft und der Stichzahl veranlässt eine entsprechende Vergröberung des Korrosionswiderstandes nur bis auf bestimmte Werte dieser Parameter, nach welchen der Korrosionswiderstand

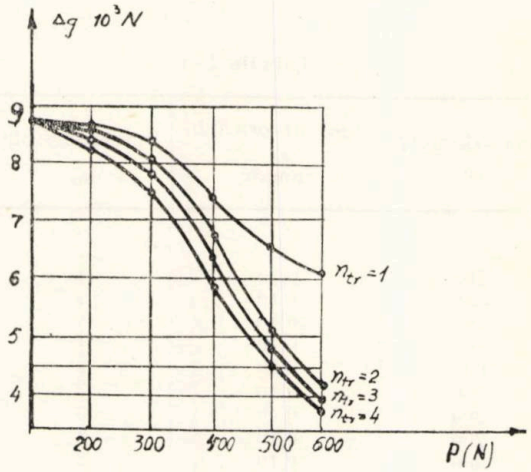


Abb. 1. — Der Einfluss der Einwalzkraft, auf den Korrosionswiderstand, für verschiedene Durchgangszahlen (1...4).

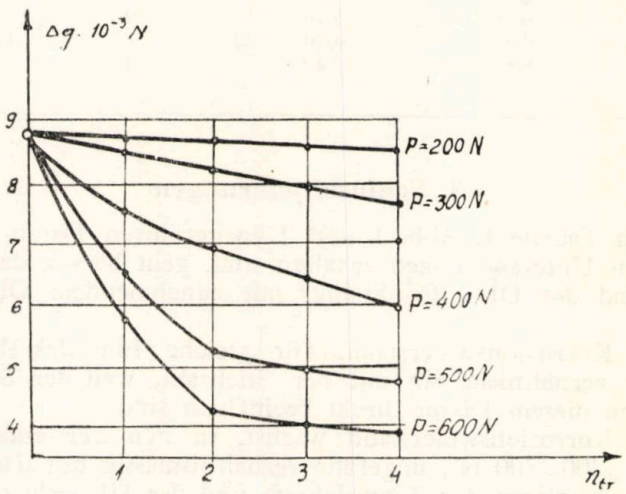


Abb. 2. — Der Einfluss der Härtedurchgangszahl auf den Korrosionswiderstand, für verschiedene Einwalzkräfte ($P_{e\ inw}$ = 200...600 N)

wegen der Schichtung der Oberflächenschicht sinkt; von wo sich die Notwendigkeit der Bestimmung, für die praktischen Fälle, der Optimalwerte der Einwalzkraft und der Stichzahl welche eine positiv-maximale Wirksamkeit haben, ergibt.

4. In dem Fall der Maschinenelemente die auf eine Komplexerscheinung aus Verschleiss, Dauerfestigkeit und Korrosion beansprucht sind, muss das Oberflächenhärten so durchgefürt werden, dass man in der Ausnützung dieser Bestandteile das beste Betragen erhält.

5. Die erreichten und vorgestellten Werte haben einen qualitativen Charakter, da der Korrosionswiderstand quantitativ von vielen Faktoren abhängt deren Einfluss nur dann zu bestimmen ist wenn man die Konkreten Bedingungen der Ausnützung der Maschinenelemente berücksichtigt.

6. Der Einfluss der Oberflächenhärtung auf den Korrosionswiderstand der Stähle ist mit den in der Oberflächenschicht erzeugten Veränderungen verbunden. Um die qualitative und quantitative Verbindungen zwischen diesen Erscheinungen zu ermitteln, müssen vielle Untersuchungen durchgeführt werden.

Eingegangen am 26. Februar 1971

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl von Technologie
des Maschinenbaus

LITERATURVERZEICHNIS

1. Fărcaş T. şi colab., *Consideraţiuni asupra metodelor de laborator pentru determinarea coroziunii.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **VII (XI)**, *1—2* (1961).
2. Hagymaş Gh. ş. a., *Coroziunea şi protecţia metalelor.* Ed. tehn., Buc., 1963.
3. Hochmann J. ş. a., *Coroziunea sub tensiune a oţelurilor inoxidabile austenitice.* În „Coroziunea şi protecţia suprafeţelor", Caiet selectiv, IDT, Buc., *5* (1966)
4. Klinov I. I., *Coroziunea aparaturii chimice şi materiale anticorozive.* Ed. tehn., Buc., 1957 (trad. din l. rusă).
5. Picoş C. şi colab., *Asupra durificării superficiale a metalelor prin rulare cu bile.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **IX (XIII)**, *1—2* (1963).
6. Picoş C. şi colab., *Influenţa rugozităţii de suprafaţă asupra rezistenţei la coroziune a pieselor din oţel.* St. şi cerc. şt., Fizică şi şt. tehnice, Acad. RPR Filiala Iaşi, *1* (1963).
7. Vedenkin S. G., *Despre coroziunea metalelor sub tensiune.* Coroziunea metalelor, IDT, Buc., *5* (1956).
8. * * * *Coroziunea metalelor sub sarcină.* Culegere de lucrări ştiinţifice, IDT, Buc., 1955

INFLUENŢA DURIFICĂRII SUPERFICIALE CU BILE ASUPRA REZISTENŢEI LA COROZIUNE A OŢELURILOR

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele cercetărilor privind influenţa deformaţiilor plastice superficiale obţinute prin durificarea pieselor din oţel OLC 45 (STAS 880—66), asupra rezistenţei lor la coroziune.

Durificarea superficială s-a realizat printr-o metodă prezentată într-o lucrare anterioară [5], ca metodică de încercare la coroziune folosindu-se imersia succesivă lentă [1] în soluţie de 3% NaCl, echivalentă cu apa de mare.

Rezultatele obţinute sînt prezentate în tabelul 1 şi fig. 1 şi 2.

În urma experienţelor efectuate s-a ajuns la concluzia că prin creşterea gradului de durificare a epruvetelor se obţine o mărire a rezistenţei la coroziune a oţelurilor. Acest proces de îmbunătăţire a rezistenţei la coroziune are loc pînă la un anumit grad optim de durificare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 66.045

TRECEREA CĂLDURII ÎN CAZUL CORPURILOR CU MICROARIPIOARE IMERSATE ÎNTR-UN STRAT FLUIDIZAT

DE

GÉRARD D'ALBON, DAVID PERETZ, VALERIU CERNESCU, IUSTIN BENDESCU, VIRGIL CLOŢAN şi GH. LOZONSCHI

1. Scopul lucrării

În lucrarea anterioară [1] în care s-a studiat transferul de căldură de la suprafeţele cu microaripioare la medii fluide în mişcare liberă sau forţată, s-a constatat că atunci cînd microaripioarele se află în întregime înecate în stratul limită, transferul de căldură este acelaşi pentru suprafeţe cu microaripioare ca şi pentru suprafaţa netedă învăluitoare, chiar dacă suprafaţa geometrică a microaripioarelor este mult mai mare decît suprafaţa netedă.

Lucrarea de faţă are drept obiectiv, studiul trecerii căldurii în cazul corpurilor cu şi fără microaripioare imersate într-un strat fluidizat.

2. Principiul metodei şi instalaţia experimentală

Metoda de măsură constă în principiu, în determinarea coeficientului α_{st} de trecere a căldurii de la o suprafaţă solidă la mediul exterior format din patul fluidizat în care se află imersat, luînd precauţiunile necesare pentru a se verifica identitatea cîmpului termic în pat fluidizat şi a debitului de circulaţie a gazului în măsurători, atît pentru suprafaţa netedă cît şi pentru suprafeţele cu microaripioare.

Pentru a avea o măsură precisă a debitului de căldură transferat s-a lucrat în regim staţionar, folosindu-se încălzirea electrică a corpului solid imersat. În acest caz:

$$Q = UI = \alpha_{st} S(t_p - t_{st}), \tag{1}$$

unde Q reprezintă cantitatea de căldură ce trece de la perete spre strat; U — tensiunea electrică a curentului continuu care alimentează rezistenţa electrică de încălzire; I — intensitatea curentului electric; α_{st} — coeficientul de trecere a căldurii de la perete la strat; S — suprafaţa de schimb de căldură, care în cazul microaripioarelor va fi o suprafaţă învăluitoare, deci o suprafaţă convenţională de calcul cum se va arăta ulterior; t_p — temperatura peretelui corpului imersat; t_{st} — temperatura stratului la o distanţă anumită de perete.

Temperatura peretelui, t_p, s-a măsurat în aceeşi regiune a suprafeţei calde pentru suprafeţele cu microaripioare şi fără, cum se observă în fig. 1.

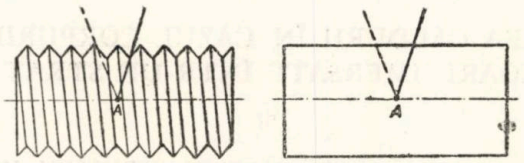


Fig. 1

Pentru a verifica dacă microaripioarele pot perturba mişcarea stratului şi care de altfel s-ar reflecta în cîmpul termic al acestuia, în experienţele făcute se explora complet cîmpul termic radial şi vertical în jurul corpului imersat. Pentru măsurarea temperaturii s-au utilizat termocuple prevăzute cu ecrane de protecţie.

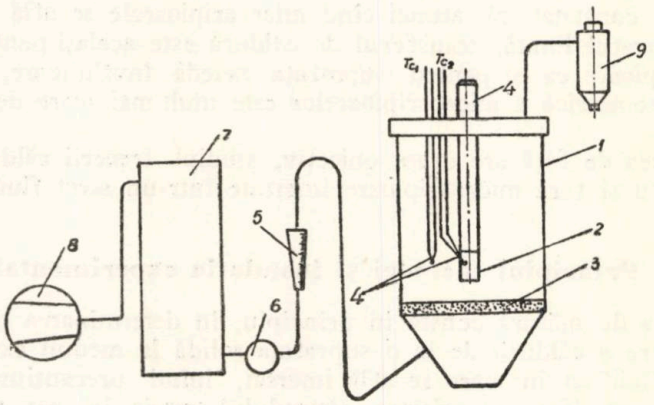


Fig. 2

Schema generală a instalaţiei dată în fig. 2 cuprinde următoarele elemente componente: *1* — coloana de fluidizare de 250 mm înălţime şi 126,5 mm diametru interior; *2* — elementul încălzitor a cărui suprafaţă de contact cu stratul a fost schimbată folosind: a) un cilindru cu suprafaţa netedă avînd diametrul exterior $d_e = 21$ mm şi înălţimea $H = 51$ mm,

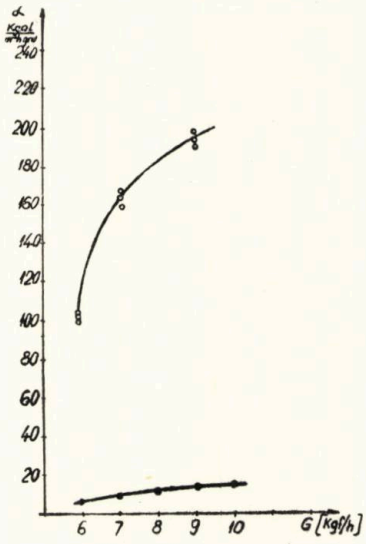


Fig. 3

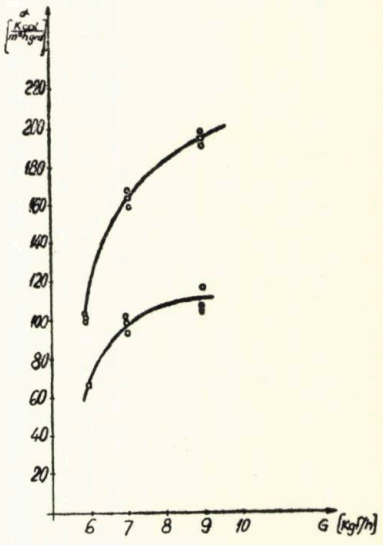


Fig. 4

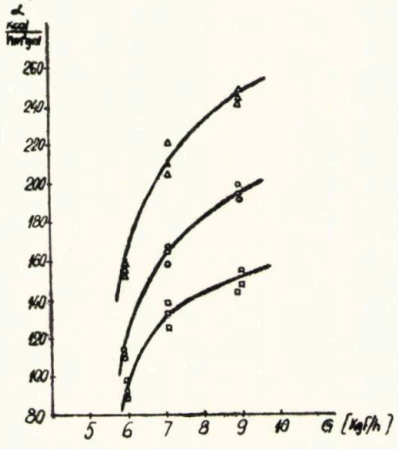


Fig. 5

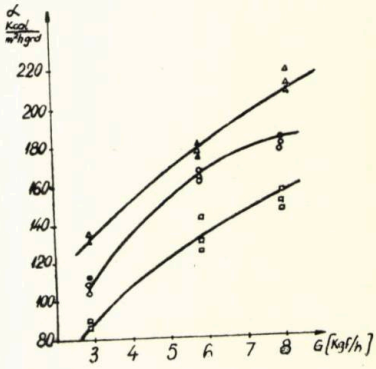
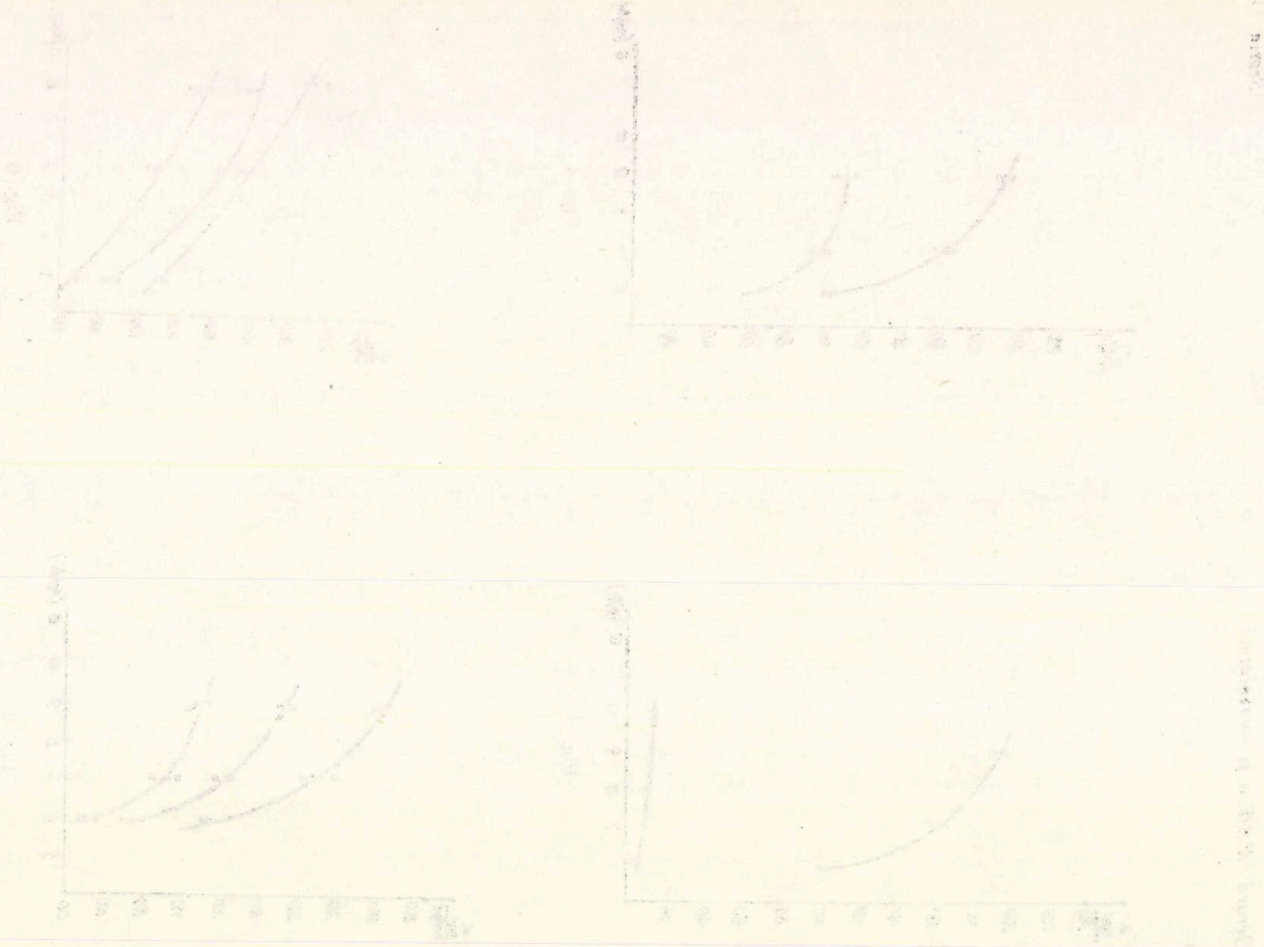


Fig. 6



suprafaţa geometrică $S_g = 0{,}003363$ m²; b) un cilindru cu suprafaţa filetată $M21 \times 1$, suprafaţa geometrică $S_g = 0{,}00502$ m² şi suprafaţa învăluitoare $S_{inv} = 0{,}003363$ m²; c) un cilindru cu suprafaţa filetată $M21 \times 2$, suprafaţa geometrică $S_g = 0{,}00451$ m² şi $S_{inv} = 0{,}003363$ m²; d) un cilindru cu suprafaţa filetată $M21 \times 4{,}5$, suprafaţa geometrică $S_g = 0{,}00345$ m² şi $S_{inv} = 0{,}003363$ m²; *3* — placa de distribuţie din beton poros caracterizată prin porozitate totală 40%; *4* — termocuple pentru măsurarea temperaturii peretului şi a stratului; *5* — rotametru pentru măsurarea debitului de aer; *6* — regulator cu membrană pentru reglajul fin al debitului de aer; *7* — vas tampon; *8* — compresor; *9* — ciclon.

Patul fluidizat a fost format din nisip cuarţos cu diametrul mediu al granulelor de 100 μ (deci cu o granulaţie suficient de mică care permite pătrunderea granulelor în profilul microaripioarelor) şi silico-aluminat cu diametrul mediu al granulelor de 50 μ.

Regimul de fluidizare a variat de la o fluidizare lentă pînă la una intensă la limita de apariţie a fenomenului de pistonare.

Pentru a se conserva condiţii egale şi independente de mediul ambiant în care se afla instalaţia, coloana de fluidizare a fost prevăzută cu o bună izolaţie termică. De altfel verificările continue ale bilanţului termic au arătat că transferul de căldură se realiza prin circulaţia aerului în proporţie de circa 98%. Măsurătorile au fost efectuate după stabilirea regimului staţionar care pentru condiţiile de lucru date se realiza în circa 30 minute. Termocuplul ecranat din strat se putea deplasa în două planuri, pe verticală şi pe orizontală, permiţînd cunoaşterea structurii cîmpului termic al stratului atît radial cît şi axial.

Temperatura medie a stratului luată în calcule este temperatura măsurată la semidistanţa între peretele corpului imersat şi peretele fluidizatorului şi simetric faţă de extremităţile corpului imersat, deoarece experienţele au demonstrat că această temperatură este perfect reproductibilă în toate cazurile.

În explicarea modului de utilizare a relaţiei (1) s-a menţionat că suprafaţa de schimb de căldură luată în calcule este în cazul microaripioarelor cea învăluitoare şi nu cea geometrică. Evident că în aceste condiţii coeficientul α_{st} va fi un coeficient convenţional de trecere.

3. Rezultate experimentale

În fig. 3 sînt redate comparativ valorile lui α_{st} în cazul aerului curat (●) şi în cazul stratului fluidizat (○) la corpul imersat cu suprafaţa netedă, în funcţie de debitul de aer G în kg/h.

Din figură rezultă că coeficientul de trecere a căldurii în cazul stratului fluidizat este sensibil mai mare faţă de coeficientul de trecere la gazul curat, în condiţii egale de debit al gazului. În literatura de specialitate [2] şi [3] se explică aceste valori ale lui α_{st} prin aceea că în stratul

fluidizat s-ar mișca sau s-ar distruge chiar stratul limită de lîngă peretele corpului imersat.

În vederea verificării acestei ipoteze, experiențele efectuate în prezenta lucrare, la corpuri cu și fără microaripioare imersate într-un strat fluidizat au putut demonstra că și în cazul fluidizării există un strat limită, care nu numai că nu este distrus ci posedă o rezistență termică proprie importantă. Fie de exemplu experiențele în strat fluidizat date în fig. 4 pentru α_{st} atît pentru cazul corpului neted (○) cît și pentru microaripioare cu filet M21 × 2 (□), în care însă suprafața de schimb de căldură este în ambele cazuri suprafața geometrică.

Se observă că coeficientul de trecere la corpul cu microaripioare este mai mic decît la corpul cu suprafața netedă, ceeace se explică în primul rînd prin faptul că stratul limită are o rezistență termică mai mare decît la corpul neted.

Pentru studiul rezistenței termice a acestui strat limită în funcție de tipul profilului studiat, a fost necesar ca interpretarea rezultatelor experimentale pentru corpuri cu microaripioare să se facă în funcție de un coeficient convențional de schimb de căldură $\alpha_{st\,conv}$, suprafața de schimb de căldură utilizată în calcule fiind suprafața învăluitoare $S_{înv}$.

Valorile coeficienților convenționali de trecere a căldurii pentru diferite tipuri de microaripioare realizate sînt redate grafic în fig. 5 (materialul fluidizat — nisip) și fig. 6 (materialul fluidizat — silicoaluminat), pentru profilul neted (○), profilul M21 × 4,5 (△) și profilul M21 × 2 (□).

Se poate constata că pentru profilele studiate coeficienții convenționali de trecere au valori apropiate de cele ale suprafeței netede, existînd diferențe în funcție de tipul microaripioarelo .

Valorile coeficienților convenționali de trecere mai mari în cazul țevii cu filet mare (M21 × 4,5) se pot explica prin faptul că înălțimea rugozităților (a, fig. 7) atinge ordinul de mărime al grosimii stratului limită (δ, fig. 7), astfel încît mărimii suprafeței geometrice a țevii îi corespunde

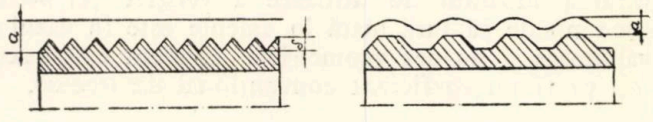


Fig. 7

și o mărire reală dar redusă a celei de schimb de căldură. Acest lucru se datorește în ultimă instanță valorilor ce le capătă simplexul δ/a, simplex care la rîndul lui depinde de raportul δ/D și $\mathcal{R}e$ (D reprezentînd diametrul piesei), deci

$$\frac{\delta}{a} = f\left(\mathcal{R}e, \frac{\delta}{D}\right). \tag{2}$$

În ceea ce priveşte valorile mai mici obţinute în cazul transferului de căldură de la ţeava cu filet intermediar (M 21 × 2), explicaţia constă în faptul că la rugozităţi foarte mici ($\delta \ll a$) între microaripioare apar reţineri imobile de material fluidizat ce îngroaşă stratul limită introducînd o rezistenţă termică suplimentară (fig. 8).

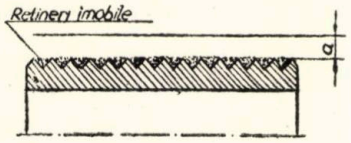


Fig 8

La experienţele efectuate cu ţeava cu filet foarte fin (M 21 × 1) s-au obţinut aceleaşi valori convenţionale $\alpha_{st\,conv}$ ca şi pentru ţeava netedă.

4. Concluzii

1. Studiul experimental al coeficientului de trecere a căldurii de la corpuri cu microaripioare imersate în strat fluidizat, a demonstrat că în fluidizare există un strat limită care se menţine ca şi în cazul convecţiei fluidelor monofazice şi posedă o rezistenţă termică proprie.

2. Intensificarea transferului de căldură în fluidizare se datoreşte contactului direct al particolelor cu peretele solid imersat în strat.

3. Calculul coeficientului de trecere în fluidizare nu se poate efectua cu ajutorul suprafeţei geometrice a microaripioarelor, ci este necesară introducerea unei suprafeţe convenţionale de schimb de căldură, egală cu suprafaţa învăluitoare a acestor microaripioare. Tipul profilului influenţează trecerea căldurii prin simplexul δ/a dat de (2), care trebuie introdus în ecuaţia criterială de calcul în astfel de cazuri.

Primită la 4 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică şi
maşini termice

BIBLIOGRAFIE

1. D'Albon G., Cernescu V., Bendescu I., Jugureanu E., Macri V., Apetrei N., *Studiul coeficientului α în cazul convecţiei la rugozităţi artificiale şi la suprafeţe ondulate.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIII (XVII)**, *1—2* (1967).
2. Zabrodsky S. S., *On Solid-to-Fluid Heat Transfer in Fluidized Systems.* Int. Heat Mass Transfer, **10**, Pergamon Press Ltd., 1967, pp. 1793—1800.
3. Аеров М. Э., Тодес О. М., *Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стацуонарным и кипящим зернистым слоем.* Изд. „Химия", Ленингр. отд., 1968.

LE TRANSFERT DE LA CHALEUR DES CORPS AVEC MICROAILLETTES IMMERSÉES DANS UN LIT FLUIDISÉ

(Résumé)

L'étude expérimental du coefficient de transfert de la chaleur des corps avec microaillettes immersées dans un lit fluidisé a démontré qu'en ce cas, il y a une couche limite qui se maintient comme dans la convection des fluides monophasiques et qui possède une résistance thermique propre.

L'intensification du transfert de la chaleur dans la fluidisation est due au contact direct des particules avec le paroi solide immersé dans le lit fluidisé.

Le calcul du coefficient de transfert dans la fluidisation ne peut pas être effectué à l'aide de la surface géométrique des microaillettes, mais on doit introduire une surface conventionelle egale avec la surface enveloppée de ces microaillettes. Le type du profile influence le transfert de la chaleur par le simplex $\delta/a = f(\mathcal{R}e, \delta/D)$ qui doit être introduit dans l'équation critérielle de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 621.43.01

EVOLUŢIA PROCESULUI DE AUTOAPRINDERE ÎN MOTOARE ANTRENATE, LA RAPOARTE DE COMPRESIE DIFERITE

DE

DAVID PERETZ

Tendinţa de creştere sistematică a raportului de compresie, în vederea îmbunătăţirii indicilor tehnico-economici ai motoarelor cu aprindere prin scînteie, este şi astăzi de strictă actualitate. Legată direct de aceasta, apariţia arderii detonante, unul din cele mai importante tipuri de ardere anormală, este studiată multilateral, pentru detectarea aspectelor funcţional-constructive care ar putea împiedica apariţia acestui fenomen nedorit.

În lucrările anterioare [1]...[3], s-a elaborat un model matematic şi macrocinetic de apreciere cantitativă a evoluţiei unei reacţii în lanţ ramificate. Cu ajutorul acestui model se poate studia procesul de autoaprindere al unui amestec de combustibil-aer în motoarele antrenate şi în cele cu aprindere prin scînteie [4]. Ecuaţiile de calcul, avînd ca variabilă timpul, conţin două mărimi caracteristice – exponentul cinetic m şi durata reacţiei de preaprindere (predetonaţie) τ_{aa}. Exponentul cinetic poate fi redat ca o funcţie de timpul adimensional de începere a unei reacţii sensibile de preaprindere t_o/τ_{aa} [4], încît experimentarea va urmări determinarea a două intervale de timp, t_o şi τ_{aa}. Instalaţia experimentală şi metodica de lucru sînt descrise în lucrarea [5].

În prezenta lucrare se studiază influenţa raportului de compresie asupra procesului de autoaprindere, într-un motor antrenat de tipul IT-9-2, menţinînd constanţi factorii funcţionali.

Într-o primă serie de experienţe, combustibilul care se autoaprinde a fost n-heptanul şi combustibilul de referinţă izooctanul. Raportul de compresie ε a variat între limitele 4,65...6, la un coeficient al excesului de aer $\lambda = 0{,}85$. Temperatura de intrare a amestecului s-a menţinut la $149 \pm \pm 1°C$ şi turaţia la 900 ± 10 rot/min.

Rezultatele experimentale sînt redate în fig. 1. Ele demonstrează că o dată cu creşterea raportului de compresie, exponentul cinetic capătă valori mai mari şi durata reacţiei de preaprindere se micşorează.

În aceleaşi condiţii de lucru, utilizînd un combustibil cu 70% izooctan şi 30% n-heptan s-au efectuat experienţe la rapoarte de compresie mai mari şi anume pentru $\varepsilon = 8...10$.

În fig. 2 (pentru $\varepsilon = 8$), fig. 3 (pentru $\varepsilon = 9$) şi fig. 4 (pentru $\varepsilon = 10$) se prezintă fotografii ale unor astfel de experienţe. Variaţia exponentului cinetic şi a duratei reacţiei de preaprindere pentru aceste cazuri sînt redate grafic în fig 5.

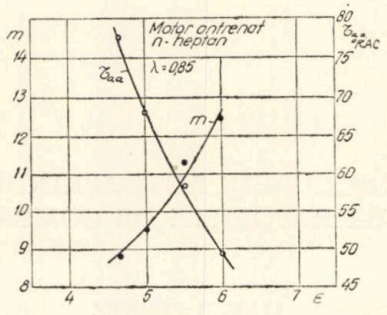


Fig. 1

Pentru a putea analiza şi interpreta mai uşor efectele creşterii lui ε asupra reacţiei de preaprindere, s-a redat în fig. 6, 7 variaţia momentului t_0 de începere a unei reacţii sensibile, respectiv variaţia duratei fazei principale a reacţiei, atît pentru n-heptan ($\varepsilon = 4{,}65...6$), cît şi pentru amestecul cu 70% izooctan ($\varepsilon = 8...10$).

Astfel, cu creşterea lui ε, reacţia de preaprindere începe din ce în ce mai devreme. Aşa de exemplu, în cazul n-heptanului, cînd raportul de compresie creşte de la 4,65 la 6, t_0 se micşorează cu 12° RAC. Pentru amestecul cu 70% izooctan, cînd raportul de compresie creşte de la 8 la 10, momentul de începere a unei reacţii sensibile se deplasează numai cu 2,1° RAC. Acest fenomen se poate explica prin faptul că o dată cu mărirea raportului de compresie, regimul de presiuni şi temperaturi aplicat într-un moment dat amestecului combustibil se deplasează spre valori mai ridicate.

Deosebit de evidentă este reducerea duratei fazei principale a reacţiei de preaprindere cu creşterea raportului de compresie. Astfel, în cazul n-heptanului, micşorarea duratei aeestei faze, ($\tau_{aa} - t_0$), este de 28,2° RAC, iar pentru amestecul cu 70% izooctan, de 13,3° RAC. Aceste rezultate dovedesc o intensificare importantă a transformărilor chimice din acest amestec, cînd se măreşte raportul de compresie. De altfel acest lucru se reflectă şi prin creşterea exponentului cinetic m precum şi prin micşorarea duratei reacţiei de preaprindere.

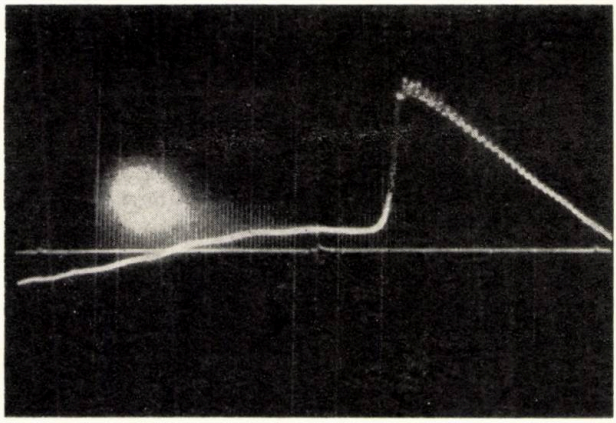


Fig. 2

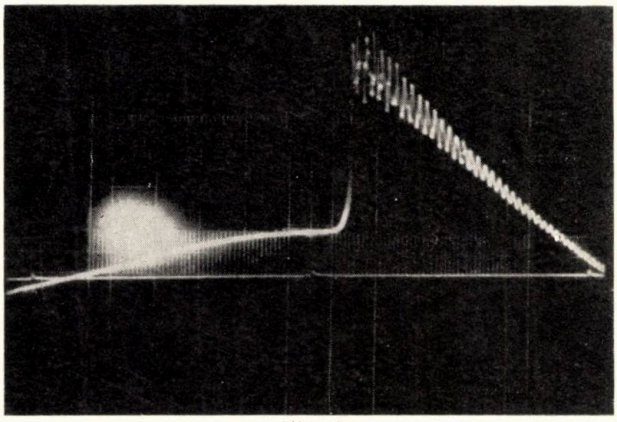


Fig. 3

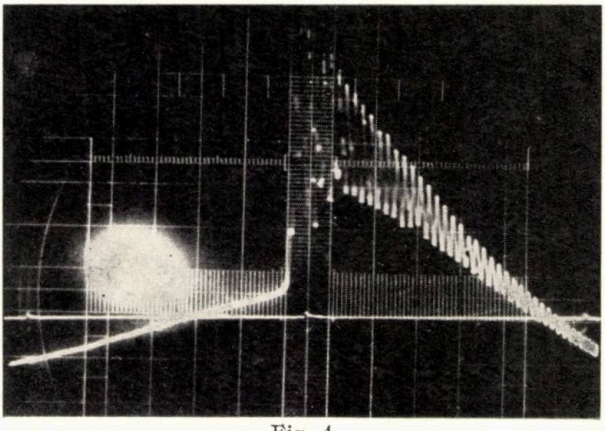


Fig. 4

În concluzie, reacţia de preaprindere este influenţată sensibil prin modificarea raportului de compresie, în sensul că mărirea raportului de compresie duce la accelerarea acestei reacţii. Rezultatele experimentale obţinute dovedesc de asemenea, că influenţa acestei variabile constructive a

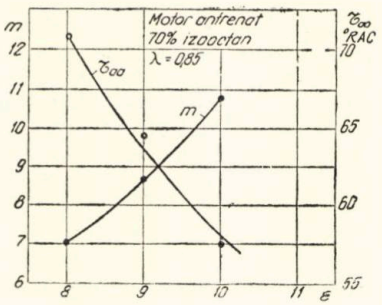


Fig. 5

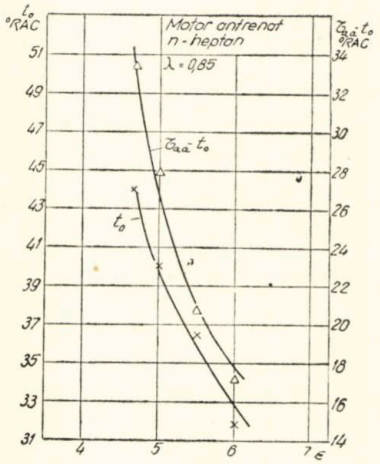


Fig. 6

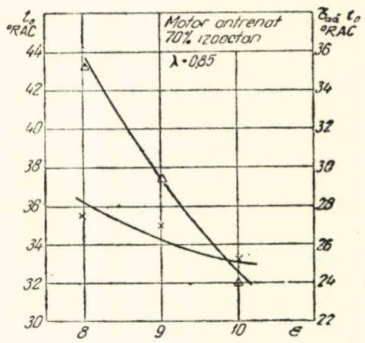


Fig. 7

motorului, atît de importantă în proiectarea motoarelor, poate fi apreciată cantitativ prin modificarea valorilor exponentului cinetic şi a duratei reacţiei. Aceste mărimi determină univoc desfăşurarea reacţiei de preaprindere în motorul antrenat respectiv şi pentru condiţiile funcţionale alese.

Primită la 1 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică şi maşini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Peretz D., *Über ein Modell der klopfenden Verbrennung in Ottomotoren.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIV (XVIII)**, *1—2* (1968).
2. Peretz D., *Kinetische Gleichungen für Vorreaktionen im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung in Ottomotoren.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XV (XIX)**, *1—2*, s. IV (1969).
3. Peretz D., *Die Korrelation zwischen den kritischen thermodynamischen Grössen und der Vorreaktion im Ladungsrest bei klopfender Verbrennug in Ottomotoren.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1969, **XV (XIX)**, *3—4*, s. IV (1969).
4. Peretz D., *A nev Possibility of Studying Experimentally the Knock of Spark-ignition Engines.* Conf. mot. ard. int. (COMOT), Bucureşti, 1970, Preprint I. n.
5. Peretz D., Ghibu C., *Instalaţie şi metodică experimentală pentru studiul detonaţiei în motoarele cu aprindere prin scînteie şi în motoarele antrenate.* Construcţia de maşini, **XX'II**, *2* (1971).

DER VERLAUF DES SELBSTZÜNDUNGSPROZESSES BEI EINEM FREMDANGETRIEBENEN MOTOR MIT VERSCHIEDENEN VERDICHTUNGSVERHÄLTNISSEN

(Zusammenfassung)

Die Versuche den Einfluss des Verdichungsverhältnisses auf den Verlauf der Vorreaktionen bei Selbstzündung festzustellen, wurden mit einem fremdangetriebenen Motor vom Typus IT—9—2 durchgefiihrt.

Als Prüfkaftstoff für kleinere Verdichtungsverhältnisse ($\varepsilon = 4{,}65 \ldots 6$) wurde *n*-Heptan gebraucht, der Bezugskraftstoff war Isooktan. Die Ergebnisse sind aus Abb. 1 und 6 ersichtlich und beweisen, dass gleichzeitig mit dem Grösserwerden von ε, der kinetische Exponent m wächst und die Dauer der Vorreaktion sich verkleinert.

Unter denselben Arbeitsbedingungen aber für höhere Verdichtungsverhältnisse ($\varepsilon = 8 \ldots 10$) wurden Versuche mit einem Prüfkraftstoff, der 70% Issoktan enthält, gefahren. In den Abb. 2, 3 und 4 sind Aufnahmen von solchen Versuche dargestellt, die Ergebnisse, in Abb. 5 und 7. Die Versuche beweisen folgendes:

1. Mit höherem Verdichtungsverhältnis, beginnt die Vorreaktion früher. So z. B. wird in Abb. 6, der Beginn einer wahrnehmbaren Reaktion t_0 für *n*-Heptan als Funktion vom Verdichtungsverhältnis ε wiedergegeben.

2. Die Dauer der Hauptphase der Vorreaktion ($\tau_{aa} - t_0$) verkleinert sich stetig mit den wachsenden Werten von ε (Abb. 6 und 7).

Diese Versuche zeigen eine starke Steigerung der chemischen Umsetzungen im Kraftstoff-Luftgemisch an, die sich sowohl durch höhere Werte des kinetischen Exponenten m, als auch durch Verkürzung der Dauer τ_{aa} der Vorreaktion wiederspiegeln. Folglich haben wachsende Werte des Verdichtungsverhältnisses eine, dem durch Kraftstoffe mit höheren Klopfwiderstand erzielten Einfluss genau entgegengesetzte Wirkung auf die Verlaufsweise der Vorreaktion.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 536.24

CERCETĂRI PRIVIND CONSTATAREA EFECTULUI JACQ ÎN CONVECŢIA CU APĂ DISTILATĂ[1])

DE

EMIL JUGUREANU

1. Introducere

Experienţele efectuate de Jacq, [1]...[3], cît şi studiile ulterioare, [4]...[10], au pus în evidenţă existenţa unei anomalii termice în cazul unui schimb de căldură între un corp metalic şi aer.

În această lucrare se prezintă primele cercetări întreprinse de autor, privind existenţa unei anomalii termice în cazul convecţiei cu lichide.

2. Instalaţia pentru cercetarea efectului Jacq în convecţia cu apă bidistilată

În fig. 1 este reprezentată o primă instalaţie experimentală pentru cercetarea efectului Jacq în convecţia cu apă bidistilată.

Două ţevi de alamă, *a* şi *b*, cu diametrul de 8 mm şi lungimile de 250 mm fiecare, sînt montate una în vasul *A* şi alta în vasul *B*, ambele confecţionate din tablă de alamă.

În vasele *A*, *B* şi *C* se află apă. Garniturile *f* asigură etanşarea ţevilor *a* şi *b* cu vasele respective, izolînd în acelaşi timp şi din punct de vedere electric ţevile de pereţii metalici ai vaselor. Piesa *e* asigură legătura mecanică şi electrică între ţevile *a* şi *b*.

Temperatura din interiorul ţevilor *a* şi *b*, care sînt încălzite cu curent electric dat de un transformator *T*, se măsoară cu două termocuple *t*.

---

[1]) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Galaţi, din 30—31 mai 1969.

2.1. Rezultatele experimentale

În vasul A s-a introdus apă bidistilată, iar în vasele B și C apă obișnuită. Prin țevile a și b s-a trecut un curent de 1 400 A la o tensiune de 3 V. Pereții exteriori ai țevilor s-au încălzit la aproximativ 90 °C. Temperatura apei din vasele A și B a fost $T_A = T_B = 30°C$..

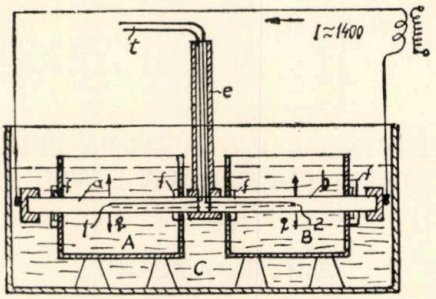


Fig. 1

Măsurarea temperaturii T_{a_1} și T_{a_2} din interiorul țevilor a și b în puncte simetrice, a pus în evidență o diferență

$$\Delta t_j = T_{a_1} - T_{a_2} = 24°C.$$

După inversarea lucrurilor, punînd apă bidistilată în vasul B și apă obișnuită în A și C, s-a obținut

$$\Delta t_j = T_{a_2} - T_{a_1} = 24°C.$$

În cazul cînd în toate vasele s-a aflat apă obișnuită, nu s-a înregistrat nici o variație de temperatură, adică:

$$\Delta t_j = T_{a_1} - T_{a_2} = 0.$$

Prin urmare, în interiorul țevii, în cazul convecției cu apă bidistilată se înregistrează o temperatură mai ridicată față de țeava din vasul cu apă obișnuită.

3. Microinstalația pentru cercetarea efectului Jac[illegible] la apa bidistilată

Instalația este în principiu asemănătoare cu cea de la § 2, cu deosebirea că în locul a două țevi s-a montat un ac de seringă, cu un diametru foarte mic, iar încălzirea s-a făcut atît în curent alternativ cît și continuu.

De asemenea, după cum se vede în fig. 2, aşezarea termocuplelor este diferită faţă de instalaţia precedentă. Acul de seringă *s*, cu diametrul de 1,6 mm şi lungimea de 125 mm, trece prin vasele *A* şi *B* confecţionate din tablă cositorită.

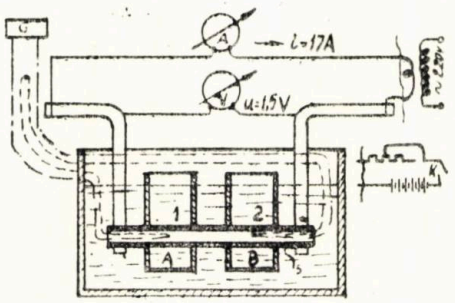


Fig. 2

3.1. Rezultate experimentale

Experienţele s-au efectuat într-un mod similar celui descris anterior. La trecerea prin acul cu seringă a unui curent de 17 A la o tensiune de 1,5 V, peretele acului se încălzeşte la aproximativ 90°C, temperatura apei din vasele *A* şi *B* fiind $T_A = T_B = 32°C$.

În cazul cînd în toate vasele se afla apă obişnuită, termocuplele din interiorul ţevii, montate în secţiunile *1* şi *2*, indicau $\Delta t_j = t_{0_1} - t_{0_2} = 0$.

După ce în vasul *A* s-a introdus apă bidistilată, iar în vasele *B* şi *C* apă obişnuită, a rezultat $\Delta T_j = T_{0_1} - T_{0_2} = 8°C$.

Experienţele s-au repetat de mai multe ori, schimbînd apa bidistilată de la un vas la altul. În toate experienţele s-a înregistrat o temperatură mai mare în vasul cu apă bidistilată.

4. Concluzii

1. Faptul că întotdeauna temperatura ţevii din vasul cu apă bidistilată este mai ridicată decît a ţevii din vasul cu apă obişnuită, demonstrează existenţa efectului Jacq în cazul apei bidistilate.

2. Se pot prezenta două cazuri distincte, indicate în fig. 3 şi 4.

a) Fig. 3 se referă la cazul cînd efectul Jacq apare numai în convecţia cu apă bidistilată. La ţeava din vasul cu apă bidistilată, reprezentată în fig. 3 *a*, cîmpul de temperatură diferă de forma clasică. Se observă că într-un strat sub-superficial, în zona de ieşire a fluxului termic, apare o cădere de temperatură anormală Δt_j, aşa-numita cădere de temperatură Jacq.

La ţeava din vasul cu apă obişnuită cîmpul de temperatură are forma clasică cunoscută.

b) Fig. 4 se referă la cazul cînd efectul Jacq apare atît la apa bidistilată (fig. 4 *a*), cît şi la apa normală (fig. 4 *b*), fiind mai accentuat în cazul convecţiei cu apă bidistilată.

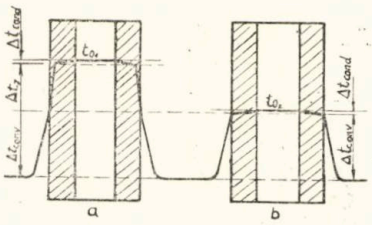


Fig. 3

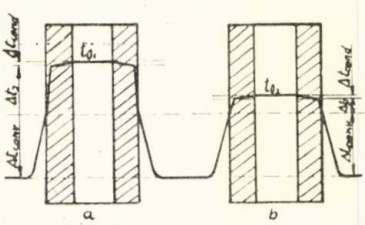


Fig. 4

Problema semnalată urmează să fie clarificată în viitor, folosind metoda coeficientului α în convecţie cu apă [10].

Primită la 27 ianuarie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică şi maşini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Jacq J., Chateau M., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C. r. Ac. Sc. Paris, **252**, *21*, 3201–3203 (1961).
2. Jacq J., Chateau M., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C. r. Ac. Sc. Paris, **252**, *20*, 3011–3013 (1961).
3. Jacq J., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'une paroi chauffée ou refroidie.* Journées internationales de la Transmission de la Chaleur; éditée par l'Institut Français des Combustibles et de l'Énergie, Paris.
4. Lucas R., *Théorie du phénomène d'anomalie de température dans les couches superficielles des matériaux.* Journées internationales de la Transmission de la Chaleur; éditée par l'Institut Français des combustibles et de l'Énergie, Paris.
5. Kaiser L., *Essai d'une théorie électronique de l'effet Jacq.* Rev. gén. de Thermique, Paris, **I**, *5*, 21—40 (1962).
6. Bonnet C., Morin R., *Étude à propos de l'anomalie de la distribution des températures dans les couches superficielles d'une paroi chaufée ou refroidi , constatée par M. Jacq.* Bruxelles, Euratom, 1963, X, 79 p.
7. Misserand A., *Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges.* Paris, Eyrolles, 1965, 554 p.
8. Harrington R. E., *Anomalous Surface Heating Rates.* J. Appl. Phys. U. S. A. (1966/67).
9. D'Albon G., Jugureanu E., Cloţan V., Lozonschi Gh., Apetrei N., *Considérations sur l'anomalie thermique Jacq et résultats expérimentaux.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XV (XIX)**, *3–4*, s. IV (1969).
10. Jugureanu E., *L'étude de l'effet Jacq par la méthode du coeficient* α. Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVI (XX)**, *1–2*, s. IV (1970).

RECHERCHES CONCERNANT LA CONSTATATION DE L'EFFET JACQ DANS LA CONVECTION À L'EAU DISTILLÉE

(Résumé)

On propose une métode pour la recherches de l'existence de l'anomalie thermique Jacq dans la convection à l'eau distillée. On présente deux instalations expérimentales, l'une utilisant un tuyau de cuivre, ∅ 8 mm, et l'autre, une microinstallation à aiguille de seringue, ∅ 1,6 mm.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.362

ASUPRA UNEI NOI POSIBILITĂŢI DE CREŞTERE A RANDAMENTULUI CENTRALELOR TERMOELECTRICE

DE

GH. LOZONSCHI

1. Introducere

Se cunoaşte că randamentul centralelor termoelectrice are valori cuprinse între 20% şi puţin peste 40%, după tipul, puterea şi starea instalaţiilor. Aceste valori reduse arată că din energia combustibilului nu se valorifică sub formă de energie electrică, respectiv exergie, decît o mică parte, restul fiind transformat în anergie.

Valoarea randamentului cazanelor de aburi moderne, cu debite mari, depăşeşte 90% iar la unele cazane ajunge chiar la valori de 95%. În calculul randamentului cazanului se ţine seama de bilanţul de energie, iar pierderile puse în evidenţă din analiza acestuia sînt: pierderi datorită evacuării gazelor arse la temperaturi superioare temperaturii mediului ambiant, pierderi datorită arderii incomplete a combustibilului, precum şi pierderi prin schimbul de căldură a suprafeţelor exterioare cu mediul ambiant.

Analiza exergetică a proceselor care se desfăşoară în instalaţiile din centralele termoelectrice cu abur, a pus în evidenţă faptul că deficienţa majoră a cazanelor de abur nu constă în pierderile de căldură pe care le scoate în evidenţă bilanţul de energie ci, în ireversibilitatea proceselor de ardere şi de transfer de căldură de la gazele arse la sistemul apă-abur.

Expresia randamentului exergetic al cazanului este:

$$\eta_{ek} = \eta_k \frac{H_i}{E_c}\left(1 - T_o \frac{S_1 - S_4}{i_1 - i_4}\right) = \eta_k \frac{H_i}{E_c}\left(1 - \frac{T_o}{T_m}\right), \tag{1}$$

în care: η_k reprezintă randamentul cazanului, H_i — puterea calorifică inferioară a combustibilului consumat, E_c — energia specifică a combustibilului, T_o — temperatura absolută a mediului ambiant, S_1 şi S_4 — entropia specifică a aburului produs de cazan şi a apei de alimentare a cazanului, $T_m = \frac{i_1 - i_4}{S_1 - S_4}$ — temperatura medie la care are loc în cazan schimbul de căldură între gazele de ardere şi sistemul apă-abur (fig. 1).

Relaţia (1) pune în evidenţă faptul că randamentul exergetic al cazanului depinde de caracteristicile combustibilului, H_i/E_c, de performanţele cazanului η_k determinate de ecuaţia de bilanţ de energie şi de pierderile determinate de ireversibilitatea procesului de ardere şi

de transfer de căldură de la gazele de ardere la sistemul apă-abur $\left[1 - T_o\left(\frac{S_1 - S_4}{i_1 - i_4}\right) = \left(1 - \frac{T_o}{T_m}\right)\right]$.

Calea de reducere a pierderilor de exergie în cazan este identică cu calea de mărire a randamentului exergetic al cazanului, care constă în mărirea temperaturii medii T_m.

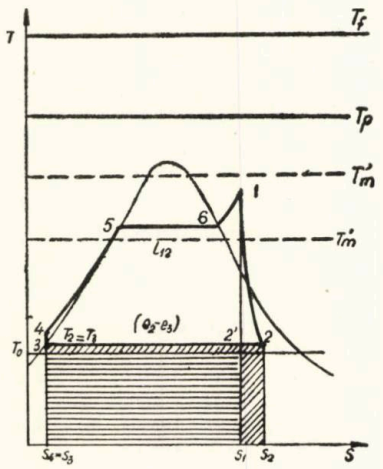


Fig. 1

Creşterea temperaturii medii T_m se poate realiza aşa după cum rezultă din diagrama $T - s$ (fig. 1) prin:

a) mărirea temperaturii finale de supraîncălzire T_1;

b) mărirea întregului nivel de temperaturi ale agentului termic prin creşterea presiunii acestuia;

c) mărirea temperaturii T_4 a apei de alimentare a cazanului prin preîncălzirea acestuia.

Aceste posibilităţi de creştere a temperaturii medii au fost analizate iar unele din concluziile ce s-au tras din această analiză au fost aplicate în practică sau sînt pe cale de a fi introduse în aplicare.

În prezenta lucrare se propune o altă posibilitate de creştere a temperaturii medii la care se desfăşoară în cazan schimbul de căldură între gazele de ardere şi sistemul apă-abur, respectiv o posibilitate de creştere a randamentului instalaţiilor de cazane, prin folosirea bateriilor termoelectrice în focarul acestora. Se propune deci, montarea bateriilor termoelectrice în focar pe ţevile ecran, astfel ca sudura caldă să primească energia termică prin radiaţie de la flacără şi de la gazele arse şi să o transmită prin conductibilitate la sudura rece care se găseşte în contact termic cu ţevile ecran.

2. Utilizarea bateriilor termoelectrice

Expresia randamentului generatorului termoelectric este:

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{W}{q_1 + q_2 - \frac{1}{2} I^2 r}, \tag{2}$$

în care: W reprezintă energia electrică debitată de termobaterie, Q — energia termică primită de generatorul termoelectric, $q_1 = K(T_1 - T_2)$ — căldura ce trece prin conductibilitate de la sursa caldă a generatorului la sudura rece, $q_2 = \alpha I T_1$ — căldură prin efect Peltier produsă de curentul I şi care este contrară fluxului de căldură, $I^2 r$ — căldura dezvoltată prin efect Joule în termoelement, din care se apreciază că jumătate se restituie sudurii calde.

Se observă că valoarea scăzută a randamentului termic se datoreşte, în special, pierderilor ireversibile prin conductibilitate termică şi prin efect Joule.

În cazul montării bateriilor termoelectrice în focar pe ţevile ecran, energia termică ce trece prin conductivitate prin generatorul termoelectric va constitui energia utilă pentru ţevile ecran, respectiv pentru fluidul ce circulă prin acestea, în timp ce pentru instalaţie va reprezenta o treaptă înaintaşă de energie.

Prin montarea bateriilor termoelectrice ca treaptă înaintaşă de energie, randamentul acesteia în instalaţie este apropiat de unitate, fiind determinat numai de căldura prin efect Peltier.

Ţinînd seama de faptul că randamentul bateriilor termoelectrice este cu atît mai mare cu cît diferenţa de temperatură dintre suduri este mai mare, se propune montarea bateriilor termoelectrice în zona transmiterii căldurii prin radiaţie de la flacără la ţevile ecran. Montarea bateriilor termoelectrice pe sistemul de supraîncălzitor al cazanului duce la micşorarea diferenţei de temperatură între cele doua suduri ale termobateriei. De asemenea, montarea bateriilor termoelectrice pe traseul gazelor arse în care schimbul de căldură se face prin convecţie determină suprafeţe de schimb de căldură foarte mari pentru sudura caldă a termobateriei.

În fig. 1, T_f reprezintă temperatura flăcării şi a gazelor arse din focar, T_p — temperatura de funcţionare în regim îndelungat a sudurii calde, T'_m — temperatura medie la care se desfăşoară în cazan schimbul de căldură între gazele de ardere şi sistemul apă-abur, în cazul cînd se folosesc baterii termoelectrice în focarul cazanului ca treaptă înaintaşă de energie.

Folosirea bateriilor termoelectrice ca treaptă înaintaşă de energie permite ridicarea temperaturii medii de schimb de căldură de la valoarea T_m la valoarea T'_m şi respectiv creşterea randamentului exergetic, prin situarea bateriilor ca elemente încălzite la temperaturi ridicate, deoarece acestea nu

prezintă solicitări mecanice și pot fi realizate economic pentru funcționare îndelungată la aceste temperaturi.

Schema de principiu a instalației este dată în fig. 2. Pe țevile ecran ale cazanului *1* se montează bateria de termocuple *2*, formată dintr-un număr *N* de termocuple legate în serie și în paralel, în funcție de curentul și tensiunea necesară la utilizare. Pentru evitarea scurt circuitării termoelementelor, la sudura rece între țevile ecran și termoelement se plasează izolația electrică *3*. Energia termică este primită de plăcuțele de radiație *4* montate la sudura caldă.

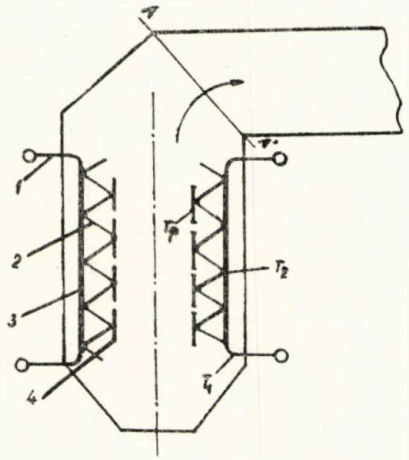


Fig. 2

Randamentul exergetic al cazanului, în cazul folosirii bateriilor termoelectrice, este cu atît mai mare cu cît temperatura medie T'_m este mai ridicată, respectiv cu cît temperatura de funcționare în regim îndelungat a sudurii calde și suprafața utilă de radiație vor fi mai mare.

Temperatura T_p de lucru a bateriilor termoelectrice depinde de materialul din care se execută termocuplele baterieiei. Semiconductorii, în stadiul actual [4], [5], [3], pot funcționa optim pînă la temperaturi de 500°C, dar în stadiul de cercetare s-au realizat semiconductori din ceramică ce pot lucra pînă la 1 316°C și cu un factor de merit ridicat. Confecționarea bateriilor termoelectrice din cupluri de metal permite funcționarea lor la temperaturi cuprinse între 600...1 000°C.

Suprafața utilă de radiație a termobateriei depinde de posibilitățile de amplasare a bateriilor în focar. Suprafața utilă de radiație a termobateriei se determină din ecuația de bilanț termic a focarului.

Ecuația de bilanț termic a focarului, luînd ca temperatură de referință temperatura t_0 a mediului ambiant, este:

$$(3)\qquad \left[\left(1-\frac{h_g+h_{0f}}{100-h_s}\right)H_i+q_1-(i_f-i_0)\right]B_{ef}=C_R\left\{\left[\left(\frac{T_f}{100}\right)^4-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{T_1}{100}\right)^4\right]\sum S_R+\left[\left(\frac{T_f}{100}\right)^4-\left(\frac{T_p}{100}\right)^4\right]\sum S'_R\right\},$$

în care h_g, h_{of}, h_s reprezintă partea din pierderile de căldură prin gaze nearse, prin radiația pereților focarului și pierderile de căldură datorită combustibilului nears; H_i — puterea calorifică inferioară a combustibilului, q_1 — căldura introdusă de aerul preîncălzit la temperatura $t_1 > t_0$, raportată la unitatea de combustibil introdus în focar; B_{ef} — debitul de combustibil care se arde efectiv; $C_R = C'_R$ — coeficienții de schimb de căldură prin radiație între suprafața bateriei și a țevilor ecran cu suprafața caldă din focar; T_f — temperatura suprafeței calde, egală cu temperatura gazelor de ardere la ieșirea din focar (planul AA din fig. 2); T_p și T_1 — temperaturile sudurii calde a termobateriei și a pereților focarului neacoperiți de baterie; $\sum S_R$ și $\sum S'_R$ — suprafețele termobateriei și a pereților focarului neacoperite de baterie.

Dacă se consideră temperatura T_f dată, și se cunoaște temperatura de lucru în regim îndelungat a materialului termoelementului T_p precum și temperatura pereților țevilor ecran T_1, din ecuația de bilanț se determină suma $\sum S_R + \sum S'_R$ și în final, impunîndu-se una din aceste suprafețe se poate determina cealaltă. În cazul cînd se cunoaște $\sum S_R + \sum S'_R$, din ecuația de bilanț termic se determină temperatura T_f de ieșire a gazelor arse din focar, cu ajutorul diagramei $i-t$, prin metoda aproximațiilor succesive.

Bateriile termoelectrice pot fi utilizate atît la cazanele de presiune înaltă, cît în special la cazanele de presiune joasă unde consumul de căldură pe kWh este mult mai mare [6].

Energia electrică obținută poate fi utilizată pentru serviciile interne ale centralei care reprezintă 6% din puterea nominală a centralei [7].

Ținînd seama că bateriile termoelectrice debitează energie electrică în curent continuu, de faptul că sînt caracterizate printr-o funcționare statică, robustețe și lipsă de pretenții în ceea ce privește controlul, cît și de faptul că parametrii electrici pot fi variați în limitele largi prin legarea lor în serie sau în paralel, sistemul poate avea o largă răspîndire la centralele proprii din întreprinderile din industria chimică și în acele domenii unde este strict necesară utilizarea energiei electrice în curent continuu.

3. Concluzii

1. Utilizarea bateriilor termoelectrice ca treaptă înaintașă de energie în focarul cazanelor permite creșterea temperaturii medii la care se desfășoară în cazan schimbul de căldură între gazele de ardere și sistemul apă-

abur, respectiv creşterea randamentului exergetic al cazanului, datorită posibilităţii de a le monta în focar la temperaturi ridicate precum şi faptului că nu sînt supuse la solicitări mecanice şi pot fi realizate economic pentru o funcţionare îndelungată la aceste temperaturi.

2. Temperatura medie la care se desfăşoară schimbul de căldură între gazele de ardere şi sistemul apă-abur este cu atît mai mare cu cît temperatura de funcţionare în regim îndelungat a sudurii calde a termobateriei este mai ridicată şi cu cît suprafaţa de radiaţie din focar, pe care se montează bateriile termoelectrice, este mai mare.

Primită la 4 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică şi maşini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Nerescu I., Radcenco V., *Analiza exergetică a proceselor termice.* Ed. tehn., Buc., 1970.
2. Иоффе А. Ф., *Полупроводниковые термоэлементы.* Изд. АН СССР, М.—Л., 1960.
3. Goldsmid H. I., *Applications of Thermoelectricity.* 1960.
4. Rossi F. D., Solid-State, Electronics, **11**, 9 (september 1968).
5. Alexeev G. N., *Transformarea directă a diferitelor forme de energie în energie electrică şi mecanică.* Ed. tehn., Buc., 1965 (trad. din l. rusă).
6. Gheorghiu S., *Cazane de abur.* EDP, Buc., 1966.
7. Schröder K., *Centrale termoelectrice de mare putere.* Ed. tehn., Buc., 1965 (trad din l. germană).

CONSIDÉRATIONS SUR UNE NOUVELLE POSSIBILITÉ D'ACCROISSEMENT DU RENDEMENT DES CENTRALES THERMIQUES

(Résumé)

Si dans une chaudière on ajoute un étage thermoélectrique organisé entre le foyer et le tuyau à eau et vapeur, cet étage aura le rendement égal à l'unité puisque l'énergie thermique nontransformée est énergie utile pour l'étage formé par la chaudière proprement dite.

Les thermoéléments n'étant pas solicités mécaniquement, par un choix convenable des matériaux, ils peuvent suporter des températures beaucoup plus grandes que celles admises habituellement dans la tuyauterie des chaudières.

Pour de tels étages qui ont le rendement égal à l'unité, la recherche des conséquences économiques consiste surtout à trouver les paramètres fonctionnels, les matériaux pour les thermoéléments et les solutions constructives et technologiques pour lesquelles le prix du MW installé est le plus bas.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.43.01

EXPRESIA GENERALĂ A GRADULUI DE PERFECŢIE A CICLURILOR TEORETICE ALE MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ

DE

EMIL GAIGINSCHI, MORITZ REICHER şi MIRCEA ZUGRĂVEL

1. Introducere

Pentru a reduce timpul pe care îl cere studiul separat al unui mare număr de cicluri existente în domeniul motoarelor cu ardere internă, este raţional să se utilizeze expresii generale, capabile de a fi uşor şi repede particularizate la cazul ciclului ce trebuie studiat.

În acest scop, ca aplicaţie a relaţiilor generale obţinute în lucrările noastre anterioare cu ajutorul ciclului teoretic general [1], [2], în cele ce urmează ne propunem să determinăm expresia generală a gradului de perfecţie a ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă, în ipoteza că toate tipurile de motoare ar funcţiona între aceleaşi limite de temperaturi şi între aceleaşi izentropice, adică în condiţiuni comparabile; de asemenea, deoarece în tratatele de specialitate lipsesc datele referitoare la aceste mărimi, în cele ce urmează ele se vor calcula pentru ciclurile uzuale.

2. Expresia generală a gradului de perfecţie

Pentru determinarea relaţiei propuse, în funcţie de elementele uzuale, să trasăm în diagrama $p - v$ (fig. 1 *a*) şi în diagrama $T - S$ (fig. 1 *b*) ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă în condiţiile impuse de ipoteza făcută.

Aceste condiţii sînt concretizate în fig. 1 *b*, din care se vede că ciclul teoretic general $3-4-5-6-7-8-1-2-3$, ca şi toate ciclurile care rezultă prin particularizarea acestuia, vor trebui să evolueze între limitele de temperaturi, T_z şi T_a, $(T_z > T_a)$ şi între aceleaşi izentropice, S_A şi S_B.

În studiul ce urmează ne referim la 1 kg de gaz perfect, presupunînd invariabilitatea căldurilor specifice cu temperatura.

După cum se știe, între aceleași limite de temperatură și aceleași izentropice, *gradul de perfecție* ρ al unui ciclu teoretic dat este *raportul dintre mărimea domeniului de reversibilitate al ciclului considerat și mărimea domeniului de reversibilitate al ciclului izoterm, luat ca etalon* [1], adică:

$$\rho = \frac{D}{D_T},$$

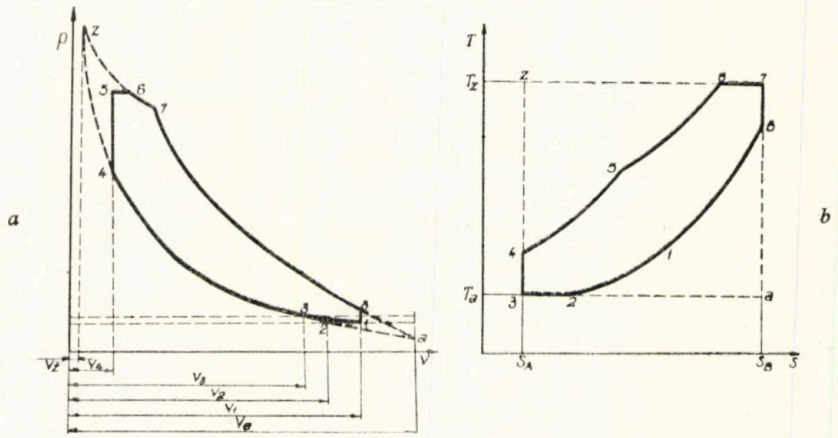


Fig. 1. — Ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă.
a — reprezentare în $p - v$; *b* — reprezentare în $T - S$.

în care D este mărimea domeniului considerat, adică mărimea căldurii reversibile din ciclul considerat; D_T — mărimea domeniului izoterm, adică mărimea căldurii reversibile din ciclul Carnot și care are ca expresie $D_T = \Delta T \Delta S$ (ΔT — diferența dintre temperaturile între care evoluează ciclul, iar ΔS — variația de entropie).

Pentru o comparație justă a mărimilor D și D_T, ciclul dat, pentru care se stabilește gradul de perfecție, trebuie carnotizat cu ajutorul temperaturilor medii. Prin carnotizarea unui ciclu se înțelege *aducerea unui ciclu dat la un ciclu echivalent ca suprafață și ca randament cu ciclul dat, dar de aceeași formă cu ciclul Carnot* [3, p. 339], [2, p. 301].

În scopul determinării expresiei generale a gradului de perfecție cu ajutorul carnotizării ciclului teoretic general, să însemnăm cu:

ρ_g — gradul de perfecție al ciclului teoretic general;

$r = T_z / T_a$, raportul temperaturilor extreme între care evoluează ciclul teoretic general și ciclul izoterm;

$\Delta S = S_B - S_A$ variația de entropie;

D_g — mărimea domeniului general de reversibilitate a motoarelor cu ardere internă, adică mărimea căldurii reversibile din ciclul teoretic general;

$\overline{T}_{g\,max}$ și $\overline{T}_{g\,min}$, respectiv temperatura medie maximă și temperatura medie minimă, exprimate în grade absolute, ale ciclului teoretic general carnotizat;

$\Delta\overline{T}_g = \overline{T}_{g\,max} - \overline{T}_{g\,min}$, diferența dintre temperaturile medii maximă și minimă, ale ciclului teoretic general carnotizat;

$\Delta T = T_z - T_a$, diferența dintre temperaturile între care evoluează ciclul izoterm;

$p_1, p_2, \ldots, p_8$; $v_1, v_2, \ldots, v_8$; $T_1, T_2, \ldots, T_8$, presiunile, volumele specifice și temperaturile absolute corespunzătoare cifrelor din vîrfurile ciclului teoretic general:

$$(1) \qquad \varepsilon_1 = \frac{v_1}{v_4}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{v_2}{v_3}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{v_3}{v_4}, \qquad \varepsilon = \frac{v_1}{v_4} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3,$$

respectiv, rapoartele volumetrice parțiale ale ciclului teoretic general, sub care se efectuează contracția la presiune constantă de la *1* la *2*, compresia izotermă de *2* la *3*, compresia adiabatică de la *3* la *4*, iar ε raportul volumetric total al ciclului general corespunzător procesului de compresie reprezentat în diagrama $p - v$ prin $1 - 2 - 3 - 4$;

$$(2) \qquad \delta_1 = \frac{v_6}{v_5}, \qquad \delta_2 = \frac{v_7}{v_6}, \qquad \delta_3 = \frac{v_8}{v_7}, \qquad \delta = \frac{v_8}{v_5} = \frac{v_1}{v_4} = \delta_1 \delta_2 \delta_3 = \varepsilon,$$

respectiv, gradele parțiale de detentă, sub care se efectuează detenta la presiune constantă de la *5* la *6*, detenta de la *6* la *7*, detenta adiabatică de la *7* la *8*, iar prin δ gradul total al procesului de detentă al ciclului general, reprezentat prin linia $5 - 6 - 7 - 8$;

$$(3) \qquad \lambda = \frac{p_5}{p_4} = \frac{T_5}{T_4} = \frac{p_8}{p_1} \frac{\delta_2 \delta_3^k}{\varepsilon_2 \varepsilon_3^k},$$

raportul de creștere a presiunii sau a temperaturii în ciclul general de la *4* la *5*;

$$\varepsilon_i = \frac{v_a}{v_3} = \frac{v_7}{v_z} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \delta_0 \delta_1 \delta_2,$$

raportul volumetric pentru compresia izotermă, egal cu raportul de destindere izotermă, în care $\varepsilon_0 = v_a/v_1$ iar $\delta_0 = v_5/v_z$.

Ținînd seama de aceste notații, gradul de perfecție al ciclului teoretic general este:

$$(4) \qquad \rho_g = \frac{D_g}{D_T}.$$

Introducînd prima condiție referitoare la evoluția ciclurilor între aceleași izentropice, se obține:

$$\rho_g = \frac{D_g}{D_T} = \frac{\Delta \overline{T}_g \Delta S}{\Delta T \Delta S} = \frac{\Delta T_g}{\Delta T}. \tag{5}$$

Pentru ciclul teoretic general, expresia lui $\overline{T}_g$ a fost obținută într-o lucrare anterioară [2, p. 307] și este

$$\Delta \overline{T}_g = \overline{T}_{g\max} - \overline{T}_{g\min},$$

așa încît $\rho_g = (\overline{T}_{g\max} - \overline{T}_{g\min})/\Delta T$, în care:

$$\overline{T}_{g\max} = \frac{T_3 \varepsilon_3^{k-1} [(\lambda - 1) + \lambda k (\delta_1 - 1) + \lambda (k-1) \delta_1 \ln \delta_2]}{\ln \lambda + k \ln \delta_1 + (k-1) \ln \delta_2},$$

$$\overline{T}_{g\min} = \frac{T_3 \{[\lambda \delta_1 (\varepsilon_3/\delta_3)^{k-1} - \varepsilon_1] + k (\varepsilon_1 - 1) + (k-1) \ln \varepsilon_2\}}{\ln \lambda + k \ln \delta_1 + (k-1) \ln \delta_2}.$$

Să introducem în expresia lui ρ_g și cealaltă condiție impusă ciclului general, anume, de a evolua între limitele de temperaturi T_z și T_a, ceea ce revine la introducerea raportului

$$r = \frac{T_z}{T_a}$$

în acest scop, ținînd seama că $T_z = T_6 = T_7$ iar $T_a = T_3 = T_2$ și de faptul că temperaturile T_6 și T_3 sînt date de relațiile

$$T_6 = \lambda \delta_1 \frac{T_1}{\varepsilon_1} \varepsilon_3^{k-1}, \qquad T_3 = \frac{T_1}{\varepsilon_1};$$

rezultă

$$r = \frac{T_z}{T_a} = \frac{T_6}{T_3} = \lambda \delta_1 \varepsilon_3^{k-1}. \tag{6}$$

De asemenea, deoarece $\Delta T = T_z - T_a = T_3 (r - 1)$, și însemnînd pentru prescurtare

$$\begin{cases} A = (\lambda - 1) + \lambda k (\delta_1 - 1) + \lambda (k-1) \delta_1 \ln \delta_2, \\ B = \left(\dfrac{\lambda \delta_1 \varepsilon_3}{\delta_3^{k-1}} - \varepsilon_1 \right) + k (\varepsilon_1 - 1) + (k-1) \ln \varepsilon_2, \\ C = \ln \lambda + k \ln \delta_1 + (k-1) \ln \delta_2, \end{cases}$$

se obține:

$$\rho_g = \frac{\Delta \overline{T}_g}{\Delta T} = \frac{rA - \lambda \delta_1 B}{(r-1) \lambda \delta_1 C}, \tag{7}$$

în care mărimile A, B și C au valorile de mai sus.

Trebuie observat că pentru calculul gradului de perfecție al ciclului teoretic general sau a gradelor de perfecție ale ciclurilor teoretice particulare, mărimile λ, δ_1, δ_2, δ_3, ε_1, ε_2, ε_3, a căror valoare minimă este 1, nu pot varia decît de la 1 pînă la valori mai mari decît 1, dar dependente de valorile impuse pentru variația de entropie și pentru raportul r.

Cum variația de entropie $\Delta S = S_B - S_A = AR \ln \varepsilon_i$, este caracterizată prin raportul compresiei izoterme ε_i, rezultă că, pentru ciclul teoretic general, între ε_i și mărimile λ, δ_1 și δ_2 (mărimi ce caracterizează variația de entropie pentru transformarea izochoră, izobară și izotermă) trebuie să existe o relație bine determinată.

Într-adevăr, după cum se vede din fig. 1 *b*, variația de entropie $S_B - S_A$ a ciclului teoretic general, este egală cu suma variațiilor de entropie ale transformărilor ce au loc din *4* în *5*, din *5* în *6* și din *6* în *7*.

Prin urmare:

$$S_B - S_A = AR \ln \frac{v_7}{v_z} = C_v \ln \frac{T_5}{T_4} + C_p \ln \frac{T_6}{T_5} + AR \ln \frac{v_7}{v_6}$$

și ținînd seama că

$$\frac{v_7}{v_z} = \varepsilon_i, \quad \frac{T_5}{T_4} = \lambda, \quad \frac{T_6}{T_5} = \frac{v_6}{v_5} = \delta_1, \quad \frac{v_7}{v_6} = \delta_2,$$

$$C_p - C_v = AR,$$

se obține

$$\ln \varepsilon_i = \frac{1}{k-1} \ln \lambda + \frac{k}{k-1} \ln \delta_1 + \ln \delta_2,$$

de unde

$$\varepsilon_i = \lambda^{\frac{1}{k-1}} \delta^{\frac{k}{k-1}} \delta_2. \tag{8}$$

De asemenea, ținînd seama că $r = \lambda \delta_1 \varepsilon_3^{k-1}$, și deoarece ε_i și r au valori fixate prin ipoteză, rezultă că pentru ciclurile particulare, mărimile λ, δ_1, δ_2, ε_1, ε_2 și ε_3 vor lua valorile corespunzătoare cazurilor respective, așa încît membrii din dreapta ai egalităților (1), (2), (6) și (8) vor putea deveni produse de trei factori, de doi factori sau conține un singur factor. În consecință, pentru calculul gradelor de perfecție ale ciclurilor ce rezultă din ciclul teoretic general, trebuie particularizate relațiile:

(I) $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, (II) $\delta = \delta_1 \delta_2 \delta_3$,

(III) $\lambda = \frac{p_5}{p_4} = \frac{p_8}{p_1} \frac{\delta_2}{\varepsilon_2} \frac{\delta_3^k}{\varepsilon_3^k}$, (IV) $r = \lambda \delta_1 \varepsilon_3^{k-1}$,

(V) $\varepsilon_i = \lambda^{\frac{1}{k-1}} \delta_1^{\frac{k}{k-1}} \delta_2$, (VI) $\rho_g = \frac{rA - \lambda \delta_1 B}{(r-1) \lambda \delta_1 C}$.

În aceste relaţii ε_i şi r au valori fixate prin ipoteză, iar $\varepsilon = \delta$ şi λ sînt mărimi care rezultă din cunoaşterea factorilor de care aceştia depind.

Pentru ciclurile cu un singur aport de căldură, λ, δ_1 sau δ_2 se calculează din relaţiile (IV) şi (V) particularizate; în acest caz, mărimile menţionate au valori bine determinate.

Pentru ciclurile cu două aporturi de căldură (de pildă la $v = \text{const}$ şi la $p = \text{const}$), pentru determinarea lui λ şi δ_1 cu ajutorul relaţiilor (IV) şi (V) particularizate, trebuie de impus fie λ, fie δ_1.

3. Concluzii

1. Utilizînd ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă şi condiţiile de particularizare a acestuia, s-a determinat expresia generală a gradului de perfecţie, în funcţie defactorii uzuali, în ipoteza că toate tipurile de motoare ar funcţiona între aceleaşi limite de temperaturi şi între aceleaşi izentropice, adică în condiţii comparabile.

2. Expresia generală obţinută (7) se particularizează uşor în cazul diferitelor cicluri, reduce timpul de studiu şi permite o vedere de ansamblu asupra gradelor de perfecţie pentru toate tipurile de cicluri ale motoarelor cu arderea internă.

Primită la 8 ianuarie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de motoare termice

BIBLIOGRAFIE

1. Gaiginschi E., *Domeniul de reversibilitate a maşinilor termice. Aplicaţiile acestei noţiuni la studiul motoarelor cu ardere internă.* St. şi cerc. de energetică, *4*, (1956).
2. Gaiginschi E., Reicher M., Zugrăvel M., *Expresiile generale ale temperaturilor medii, utilizate în carnotizarea ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, II (VI), *3—4*, 301—312 (1956).
3. Gaiginschi E., D'Albon G., *Utilizarea noţiunii: „domeniul de reversibilitate a maşinilor termice" pentru stabilirea gradului de perfecţie a ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, I (V), *1—2*, 337—343 (1955).
4. Gaiginschi E., Cernescu V., *Ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă. Consideraţiuni asupra expresiilor generale ale randamentului termic şi ale presiunii medii.* Bul. Inst. polit. Iaşi, I (V), *1—2*, 345—361 (1955).

ОВЩЕЕ ВЫРАЖЕИИЕ ГРАДУСА СОВЕРЩЕНСТВА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ДВИГАТЕЛЕИ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

(Резюме)

Пользуя обобщенный теоретический цикл двигателей внутреннего сгорания и условия для нахождения его частных случаев, было определенно обобщенное выражение градуса совершенства в зависимости от узуальных факторов, в гипотезе что двигатели работают между одинаковыми границ температунами и одинаковыми изоэнтропами.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. Ç. 621.43.06

CONSTRUCTION OF A PHOTOELECTRIC SMOKEMETER AND RESULTS OF TESTS ON A D-103 ENGINE [1])

BY

AURELIAN SIMIONESCU, AL. BÎRJOIANU and AL. ŞTIURCĂ

1. Statement of the Problem

The paper presents a constructive version of a smokemeter carried out within the framework of the Centre for Technical and Physical Research, Iaşi, and the results of tests performed on the D-103 tractor engine.

The aim of the constructed apparatus is to measure the smoke degree of exhaust gases in internal combustion engines.

It is particularly important to know the degree of intensity of smoke emitted by internal combustion engines and especially by those with compression ignition, for two reasons.

On the one hand, the smoke in exhaust gases represents an indicator for estimating combustion quality [3], [8,] [10] and on the other hand, high-density smoke renders intense traffic on arterial roads difficult and contributes to air pollution.

In some countries, the problem of air pollution is a state question, an the legal limits of smoke degree are established by law [3, p. 36], [6, p. 353].

The theory on smoke appearance in internal combustion engines is not altogether elucidated and several opinions on its causes are voiced [6], [9], [11]. One of the most important factors influencing smoke intensity in diesel engines is flame cooling in the combustion chamber.

There are also different opinions as concerns smoke classification. Some researchers classify smoke into vaporous smoke without macroparticles and vaporous smoke with macroparticles [13], others classify it into white smoke and black smoke [11].

---

1) Presented at the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, July 2–4, 1970

Irrespective of the name of the smoke, its intensity is due mostly to particles of unburnt solid carbon in exhaust gases. Two main methods are known for estimating the smoke degree of internal combustion engines: one is based on the measuring of exhaust gas transparence according to Lambert's law and the other one on the filtration of these gases and the evaluation of the trapped amount of gas [10].

Apparatuses for measuring the smoke degree, constructed on the basis of the two principles are classified as follows [4]:

1. photoelectric smokemeters [4], [5], [7];
2. filtrating smokemeters [2], [4];
3. mixed smokemeters [2], [3].

In order to investigate white smoke a baffle-type smokemeter [11] was constructed, based on the reflection of the light flux on the white smoke layer.

The choice of the appropiate type of smokemeter depends on the working conditions of the motor (on the test-stand or while running), on the operational regime (steady or transitory) and on the smoke which is to be determined [11], [13]. For instance, the photoelectric smokemeter may be used for determining the degree both of the vaporous smoke without macroparticles or of the white smoke, and of the vaporous smoke with macroparticles, while the other types give better results in the case of smoke with macroparticles, either solid or liquid.

Taking into account the above-mentioned conditions and the necessity to follow up permanently the variation of smoke density, a photoelectric-type smokemeter was constructed by our team.

2. Description of the Apparatus

The constructed apparatus (Fig. 1) consists of a metallic tube *1*, at whose ends are installed the incandescent lamp *2* and the photoelectric cell *3*. Glass plates *4*, which are separating the lamp and photoelectric cell from the gas column, are installed in a sliding system which enables their dis-

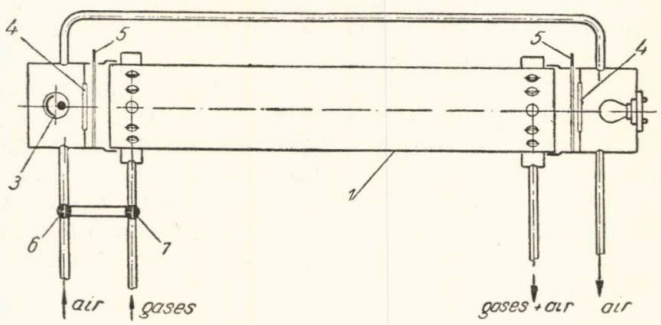


Fig. 1. — Scheme ot the smokemeter.

mounting and cleaning while running. Small sliding plates *5* protect glass plates against blackening in the interval measurements. Lamp *2* and photocell *3* are supplied with an air-cooling system. The admission of gases in the measuring tube occurs at one of the ends and it is controlled by a 3-way valve *7* with large gauge.

Gases left in the tube after carrying out the measurement are exhausted by means of compressed air introduction in three-way valves *6* and *7*.

The smoke degree is measured in the conditions of gas column-moving. To avoid an increased density of the sample, with its consequences, the cross-sectional area of gas outlet openings in tube *1* is twice as large as that of the inlet openings.

2.1. Gas Trapping System

Trapping systems of exhaust gases in internal combustion engines are of two kinds [13]:

(i) direct trapping, used when measuring the smoke degree, particularly in the transitory regime and characterized by the fact that exhaust gases are passing directly through the measuring tube without a previous storage in a tank;

(ii) indirect trapping, in which samples extracted from the exhaust gases are introduced in a special sample chamber, wherefrom only a small portion of gases are introduced into the measuring tube.

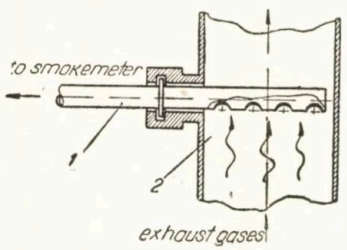


Fig. 2. — Gastrapping system.

In the present case the gas sample was removed by means of a system with direct trapping. This system consists of pipe *1* (Fig. 2) mounted perpendicularly on the exhaust pipe *2* and liable to be dismounted. Pipe *1* is supplied with openings along a diametrally placed generatrix, oriented upstream to ensure especially macroscopic particle trapping. The three-way valve *7* (Fig. 1) may make measuring tube *1* of the smokemeter communicate either with the exhaust pipe or with the compressed air tank, by means of the three-way valve *6*, with the aim of cleaning the system from combustion gases, after the measuring operation.

The exhaust gas trapping system is installed in the vicinity of the exhaust manifold to avoid alterations in the consistency of the actual sample. Yet, according to some authors [4] such an alteration is not practically observed up to a distance of about 2.2 m from the manifold.

2.2. Electronic Wiring Diagram

The electronic part of a smokemeter is represented by an usual amplifier performed with one of the triodes of the ECC 83 tube. The input signal of the electronic amplifier is taken from the charge resistance of the photocell (7 MΩ) (Fig. 3). The measuring device is installed in the anode of the amplifying tube, in a bridge-circuit. On the other arm of the bridge is mounted the couple of the triode from the same tube ECC 83. A potentiometer was connected in parallel on the measuring device in order to control the sensitivity of the smokemeter for the set value. Two calibrated resistances may be introduced with a change over switch instead of the potentiometer. They permit to achieve two scales of different sensitivities, corresponding to smoke measuring in idle-running or full-load engines.

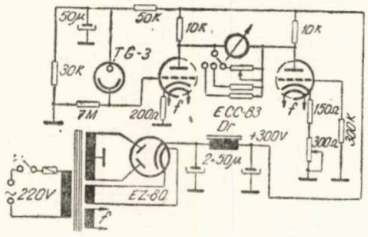


Fig. 3. — Electronic wiring diagram, of the smokemeter.

The zero-point of the measuring (in the absence of the gas column) and of the maximum reading (in the absence of the light flow) is tested for every measurement. If necessary, the zero-point of the device is readjusted with a 300 Ω potentiometer from the cathode of the equilibrating tube. The apparatus is fed from a source of stabilized tension.

2.3. Measuring of Smoke Degree

The smoke degree is determined by relation [12]:

$$F = \frac{I_0 - I}{I_0} 100 \ \% \ ,$$

where I_0 and I are the indications of the measuring device, corresponding to light flow falling on the cell, in the absence and presence of exhaust gases in the measuring tube.

3. Experimental Results

The described apparatus was used to plot the variation curve of smoke degree in a D-103 engine of a U-650 tractor, running on a regulator characteristic for highest rotational speed (Fig. 4) and for 85 % of maximum rotational speed (Fig. 5), as well as on a rotational speed characteristic (external characteristic) (Fig. 6).

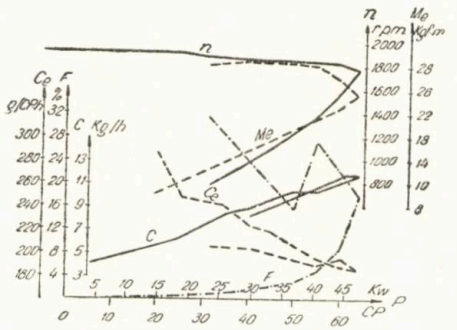


Fig. 4. — Regulator characteristic for maximum rotational speed of the $D-103$ engine: n — engine rotational speed, M_1 — real torque, C_e — effective specific fuel consumption, C — horary fuel consumption, F — smoke degree, P_e — real power.

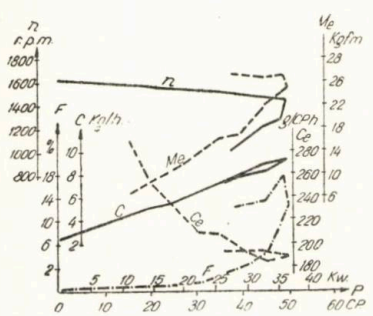


Fig. 5. — Regulator characteristic for 85 % of maximum rotational speed of D-103 engine.

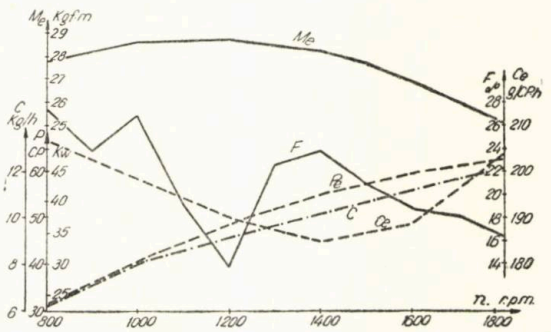


Fig. 6. — External rotational speed characteristic of D-103 engine.

From Figs. 4 and 5 it is seen that the smoke degree increases with the engine power, the curve changing its slope for the considered engine, between 50 and 55 HP (Fig. 4). This sudden change of the smoke curve slope establishes the moment where combustion impairs, more exactly than the variation curve of the fuel actual specific consumption.

These results agree also with the findings of other investigators [8].

In Fig. 6 (notations have the same meaning as in Figs. 4 and 5), the particular character of the curve of smoke degree variation with rotational speed may be observed. For low rotational speed of the engine the smoke degree is high but it decreases with increased rotational speed and at 1200 r.p.m. a minimum is reached. A maximum of the curve appears around 1400 r.p.m., after which the smoke degree decreases with rotational speed down to 1800 r.p.m. Yet it is higher than the value corresponding to a speed of 1200 r.p.m.

High values of the smoke degree for low rotational speed are accounted for by low atomization, caused by low injection pressure and resulting in smoky combustion.

The lowest value of the smoke degree, about the rotational speed of 1200 r.p.m. points out that, for this rotational speed, combustion occurs in better conditions. When rotational speed exceed this value, the smoke degree increases quickly, reaching a maximum at 1400 r.p.m. It then deacreases in the field of high rotational speeds, where the thermic state of the engine and the mixture forming process enable a better combustion.

Our tests, aimed at accounting for the lowest value of the smoke degree for a rotational speed of 1200 r.p.m., showed that it does not depend on the advance angle at the injection or on gasodynamic resistances in the air inlet conduct.

It is worth mentioning that the minimum value of the smoke degree for a rotational speed of 1200 r.p.m. corresponds to the maximum torque.

This observation may suggest a new method of determination of rotational speed, corresponding to the maximum torque for a given engine, by plotting the smoke curve.

4. Conclusions

1. The described apparatus, belonging to the class of photoelectric smokemeters, gives better indications for the smoke degree than the other types if the engine is running in transitory regime, for any kind of smoke. The types of filtrating and mixed smokemeters give better indications than the described type of apparatus only in the case of smoke with liquid or solid macroparticles.

2. The time necessary for smoke degree measurement is shorter than that required by apparatuses of the other types.

3. The plotted smoke curve gives better indications than the variation curve of the actual fuel specific combustion as concerns the moment of combustion impairment.

4. The smoke curve plotted on the external characteristic of the engine gives indications concerning the rotational speed where the maximum torque occurs, which depends on the type and aim of the engine.

Received September 28, 1970

Centre of Technical and Physical Research of the Academy of Socialist Republic of Romania, Jassy Division

REFERENCES

1. Aramă C., Grünwaldt B., *Motoare cu ardere internă. Procese şi caracteristici.* Ed. tehn., Buc., 1966.
2. Bignardi L., *Uno strumento di valutazione della fumosita allo scarico dei motori diesel per autotrazione.* Italia, **XXII**, *2*, 55–62 (1968).
3. Brubacher Miles L., Milington W. B., French C. C. J., Sr., Schmidt C. R., Kamo R., Carey Al. W., *Smoke and Smell Reduction are major Diesel Exhaust Problems.* SAE Journal, 34–37 (September 1967).
4. Burman G. P., Deluca F., *Fuel Injection and Controls for Internal Combustion Engines.* Simmons-Boardman, Publishing corp., New York, 1962, pp. 288–290.
5. Glatte W., *Standardisiertes Rauchdichte Messgerät RDM-4.* Kraftfahrzeugtechnik, *8*, 234–235 (August 1968).
6. Gross-Gronomski E., Wacholder B. D., Rotstein B., Kabin D., *Influence of Intake Air Temperature on Smoke Emission in Diesel Engine.* J. of Inst. of Fuel, London, *8*, 352–357 (August 1967).
7. Hübner W., Neuhäuser W., *Ein Beitrag zur Trübungsmessung von Dieselmotorenabgasen.* Kraftfahrzeugtechnik, *2*, 40–41 (Februar 1968).
8. Manea Al., *Măsurarea gradului de fum al gazelor de evacuare prin metoda optică.* Construcţia de maşini, *8–9*, 474–475 (1967).
9. McConnell G., Howells H. E., Golothan D. W., Vulliamy M., Spiers J., Miller C. O., *Influence on Fuel Properties and Effect of Antismoke Additives on Diesel Exhaust Smoke.* The SAE Journal, 36–46 (March 1968).
10. Stratulat M., Munteanu S. D., *Încercarea motoarelor cu ardere internă* Ed. tehn., Buc., 1966, pp. 155–160.
11. Тарев В. В., *Влияние сорта топлива и антидымных присадок на дымности отработавщих газов дизелем.* Экпресс информация поршневые и газотурбиные дбигателем, *30* 24—28 (1968).
12. Волсиок Л. Л., *Методы измерения в двигателях внутреннего сгорания.* Машгиз, М., 1655, стр. 256–264.
13. * * * *Which Smokemeter is Best? It depends on the Smoke.* SAE Journal, **72**, *12*, 86–88 (December 1964).

CONSTRUCŢIA UNUI FUMMETRU FOTOELECTRIC ŞI REZULTATELE ÎNCERCĂRILOR PE MOTORUL D–103

(Rezumat)

Aparatul construit dă indicaţii bune asupra gradului de fum la funcţionarea motorului în regim tranzitoriu. Este ieftin şi uşor de construit. Timpul necesar unei măsurători a gradului de fum este mai scurt în raport cu celelalte tipuri de aparate.

Curba de fum ridicată pe caracteristica de regulator dă indicaţii asupra momentului înrăutăţirii arderii, iar cea pe caracteristica externă, dă indicaţii asupra turaţiei la care momentul motor este maxim.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621.941

CONTRIBUTIONS TO THE APPLICATION OF MIST-COOLING WITH LIQUID AT LOWER PRESSURE, TO PROFILED LATHING OF BEARING ELEMENTS [1])

BY

GH. CAȘLER and BORIS PLĂHTEANU

1. Introduction

Cutting processes are some of the most complex cases of plastic deformation, finishing with destroying the metal layer in front of the tool, when implicitely considerable heat may be developed, as a result of plastic compression and friction between tool-chip, tool-workpiece.

The hingh temperature developing along this process reduces the durability of the tool, that is why the importance of cooling fluids is of major importance.

F. W. Taylor was one of the first engineers to find the importance of cooling by means of liquid and proved this in his report in 1906 [6].

As a result of the phenomena of heat evolving, thermic fields with a distribution scheme and an isothermic form (Fig. 1) appear within the blank, tool and chip. Such a scheme accounts for the conclusion that a direct connection exists between tool wear and temperature distribution, on its faces.

The distribution of thermic fields (Fig. 1), as well as contact temperature are in their turn influenced by the assembly of cutting process parametres and therefore by the medium in whith the process takes place.

The cooling liquids, as well as the cooling methods directly reduce both temperature values and (Fig. 1) tool wear. Yet, indirectly as these liquids also have lubricating properties, penetrating between the tool and the chip on the top face and tool-workpiece on the side tool-flank, they will reduce temperature levels by reducing friction between these surfaces,

[1]) Presented at the Scientific session of the Roling Elements Plant — Bîrlad December 10, 1969.

the abrasive wear of the tool being also reduced. Cooling in the cutting processes with mist liquid jet, shown for the first time in 1944 [1], has been spreading since 1950 as an efficient cooling system in England, U.S.A., France, West Germany, U.S.S.R, etc.

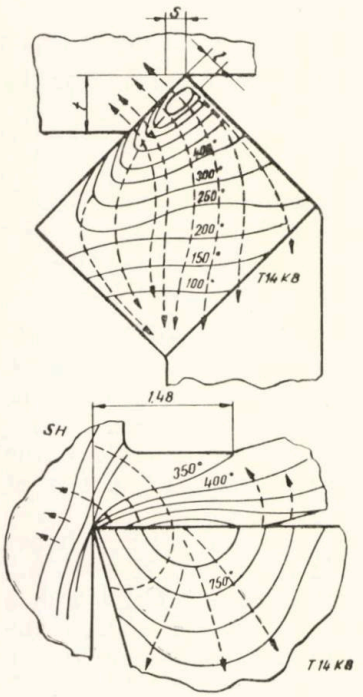
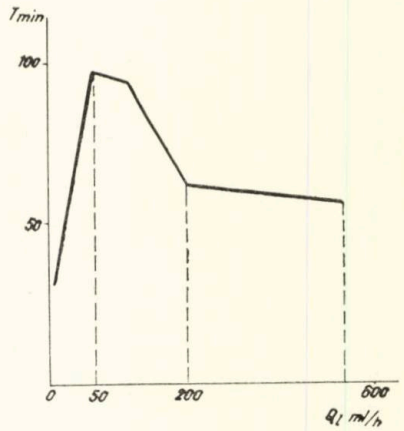


Fig. 1



a

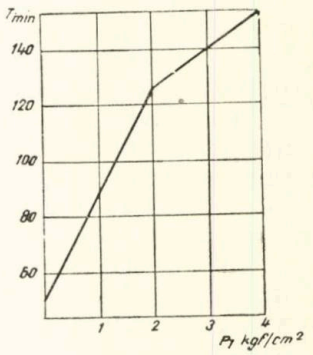


Fig. 2

Some of the most important activities as regards the introduction of this cooling procedure are:

a) Experimental investigations with „Hi-jet", 1952 (U.S.A.).;

b) In 1956, the english firm „Norgren-Limited" presented an installation of mist liquids cooling at the „Olympia" exhibition;

c) In 1957, the american firm „Obim Manufacturing Co" built an installation for mist liquids [2];

d) A systematic activity of experimenting this cooling method has been performed beginning with 1956 at NILSI (U.S.S.R.).

Generally speaking, the experiments on cooling action by means of mist liquids have shown that the particularities of this cooling process offer possibilities of intensification and amplification of this action, the mist state of the liquid determining the great thermic efficiency of this method [3]. The great amount of experiments performed by a large number of researchers under various working conditions, using various methods with a view to a whole series of parametres of cutting processes, in the presence of cooling liquids, allows the study of the complex influence of characteristic parametres of the mist liquid jet on the cutting process.

As regards determinations of some parametres to express as completely as possible the characteristics of the mist liquid jet, a series of scientific works can be mentioned: Reznikov [4] has established an optimum value of liquid flow starting from the equation of thermic result on the evaporation of a drop.

A collective led by prof. M. I. Klushin has innitiated a series of investigations regarding the determination of the optimum liquid flow with considerations on air presure (Fig. 2).

A. Bulat has considered as determinant parametres flow and it pressure, and studied their influence on jet temperature (Fig. 3). Show [6], V. M. Tihonov, Jiri Kasal [7], I. Proskuriakov [4] have also taken as parametres the liquid flow and the air pressure.

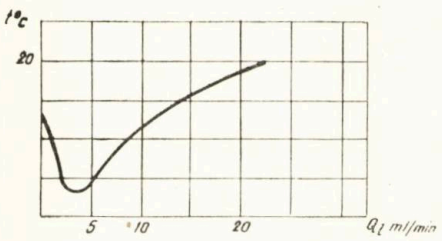


Fig. 3

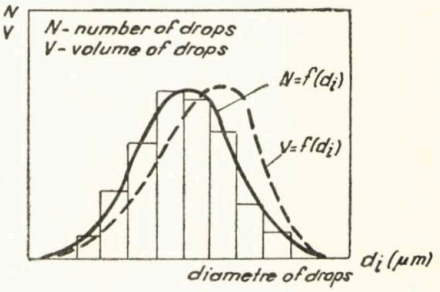


Fig. 4

In view of the general properties of the mist liquid jet in the cooling processes, in [8] the cooling quality of the jet with regard to its characteristics have been establish as: drop dimension, number of the drops/surface unity in time unity, the dynamics of the jet as well as a method proper to the appreciation of these parametres.

It is for this reason that the study of the mist spectrum has come to be considered (Fig. 4) by collecting the drops on a retaining medium, photographing in the microscope, measuring the diametre and counting the drops by means of a projection method. The spectrum thus obtained represents the effect of the action of the above mentioned parametres which leads to a rigurous appreciation of the mist-forming process with a

view to its optimisation, with an immediate effect on incresing tool durability, economy of liquid and posibility on increasing the cutting parameters.

Depending on the mist spectrum one can establish characteristic parametres which offer an optimized regime of mist with a maximum efficiency [8].

2. Experimental Researches

Taking into account that within the mist process the cooling is efficient particularly on the direction of the side flank, an experimental study has been undertaken in this paper as well as many other plant experiments, to establish the optimum domain of application of cooling by means of mist to the profiled lathing of bearing rolls.

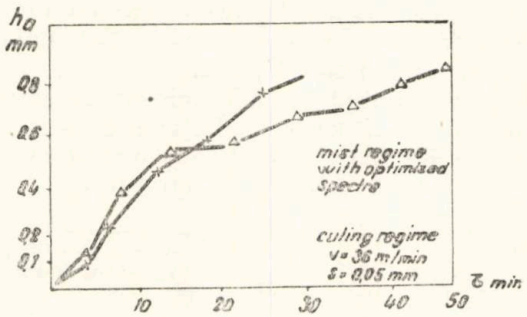


Fig. 5

In this respect, on the basis of the general laws of metal cutting and of tool wear, owing to cooling, particularly on the side flank, the greatest efficiency is obtained with cutting regime and with tool to which friction and wear phenomena on the side flank are preponderent with regard to these on the top face.

The laboratory investigations have been made with an experimental installation that uses a distributor mixer, installation projected and executed within Machine-Tools Laboratory of the Politechnic Institute of Jassy. The scheme of installation presented in Fig. 6 comprises a pneumohydraulic accumulator with cooling liquid *1*, pressure regulators *2-3*, mist-mixer *4*, and air filter *5*.

By using the above mentioned methods of research [8] based on the spreading curves of drops in the jet, considered under the form $N=f(d_i)$ or $V=f(d_i)$ (Fig.4) there have been established characteristic parametres which determine an optimized regime of mist obtained under these circumstances: 1) liquid belonging to aequous solutions; 2) oil emulsion in water 1,5% concentration.

Within the experiments performed in our Machine-Tools Laboratory, there have been made investigations on an SN 400 lathe using disc profiled cutters for the processing of Ø 20 mm bearing rools, tool material — RW 180, processed material RUL 1 with HB 203-205 durity, cutting regime: s_t=0,05 mm/rot, cutting speed v=36,5 m/min. The laboratory experiments have tried to establish an optimized regime of cooling by liquid mist, with a view to reducing cutter wear on the side tool flank (Fig. 7, where *1* represents dry cutting, *2* — cooling processing by flowing, *3* — cooling by mist with an aequous solution, *4* — processing with an optimized cooling regime).

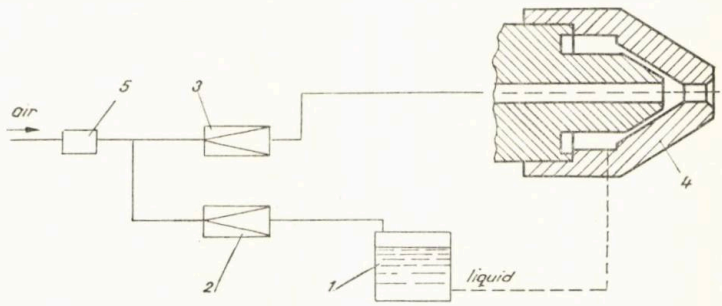


Fig. 6

The wear has been observed through a Brinell magnifying glass with a 0,05 mm precision of reading. The time variation of the wear has been determined by periodical mesurements of the wear face on the side tool flank (h_a).

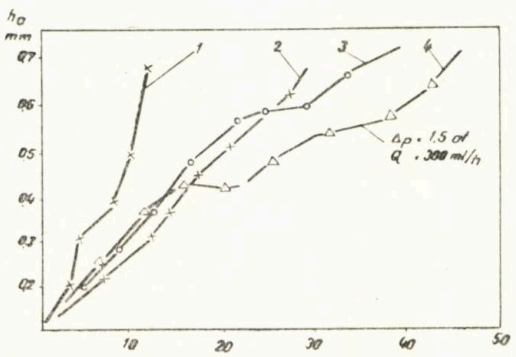


Fig. 7

Out of the analysis data (fig. 7) the durability in the bearing roll processing with cooling by means of mist, has been found to be 5 times greater than in the case of dry cutting. During the whole period of labor-

atory investigation the tool wear has occured without cutter decarburation, the obtained rugosity in the processing with mist liquids has comprised comparable values of rugosity on the transversal direction and superior on the longitudinal direction, a fact accounted for by the influence of the cooling medium on the reduction of the-built up edge- of the tool. The results above mentioned obtained in the laboratory experiments, regarding the possibility of applying cooling by means of mist liquid to the profiled lathing of bearing elements have permitted an experimental cooling installation, with four working places, to be employed in industry, which works at determined parametres, adjusted to a pluriax automatic 1262 M lathe (Fig. 8).

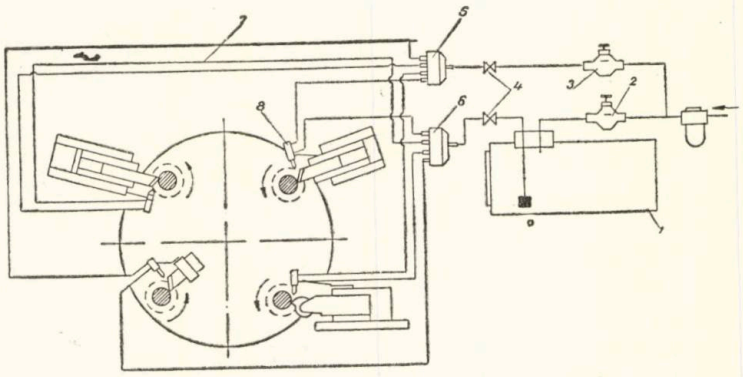


Fig. 8

The installation consists of the pneumo-hydraulic accumulator with cooling liquid *1*, pressure regulators *2—3*, closing taps *4*, distributors *5—6* and mist-mixer *8*.

The plant experiments performed at the Roling Elements Plant — — Bîrlad materialized in 120 running hours, have underlined the following problems: behaviour of the installation on long functioning, with establishing the degree of stability of the pulverized jet; posibility of running the installation in plant conditions, at optim characteristic parametres of the mist jet with the study of the action of cooling of an aequous liquid and of oil emulsion in water (1,5 %).

The variation of the liquid flow with regard to the running time has permitted the deliniation of the stability of the mist jet as it results in Fig. 9. Out of the graphic, it is noticed that there really exists a variation of the flow in time, but this has no influence on the cooling process. It is seen that, at the same time with the growth in difference betwen the pressures of the air and the liquid, it takes place a growth in the stability of the jet.

All along the experiment there have not appeared pulsations of the jet, disadvantage that had been seen at installations working by a different functioning scheme. This proves, once more, the qualities of the former installation.

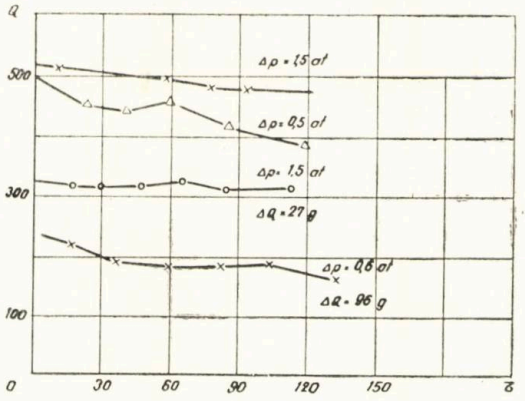


Fig. 9

Compared with the situation in Fig. 9, the experimental delineations continued by the curve $\Delta_p = 1{,}5$ atm, prove the efficiency of the installation and the method used on the profiled lathing of rolls of $\varnothing$ 15 and $\varnothing$ 22 mm, by determining the wear of the profiled toolls and maintaining the same cutting regime (tool material RW 180, material-work RUL 1, cutting regime $s = 0{,}05$ mm/rot, $v = 36$ m/min, cooling by flow of the cooling oil).

The tabel 1 shows comparatively the results obtained.

Tabel 1

Dry cutting		Cooling by free flow $Q_e = 18$ l/min		Mist cooling with aequous solution		Mist cooling emulsion 1,5%	
τmin	h_a mm	τmin	h_a mm	τmin	h_a mm	τmin	h_a mm
1	0.1	3	0.2	1	0.1	3	0.1
2'10''	0.15	5	0.35	4	0.2	10	0.2
5'30''	0.3	8	0.4	8	0.25	15	0.25
6	0.32	10	0.5	12	0.35	25	0.4
9	0.4	18	0,55	16	0.5	32	0.5
10	0.45	22	0.57	21	0.5	36	0.7
12	0.8	25	0.7	25	0.75	39	0.7
13'10''	—	32	0.8	30	0.82	44	0.75
						50	0.85

3. Conclusions

1. The construction and calibration of the two mist installations with a mixing device of the type with modified ejection have given data which allow the conclusion that the appreciation of the mist regime by the characteristics of the pulverized drops represents a really scientific criterium.

2. Cooling by low presure mist can be succesfully applied in the bearing plants in the conditions of processing by cutting with profiled tools of the bearing elements. The research done in the present, both in laboratories an in plants, show the achieving of a better durability as compared with the cooling of free-flowing oil.

3. The installation used allows the obtaining of a risen stability of the mist jet, the action of the cooling medium having the same intensity all along the processing.

4. The introduction of the mist cooling has also economical results, coming from the growth of the tools durability, reduction of the specifical consumation of cooling oil and brings improvements regarding the hygene of the working place.

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Machine-Tools

Received 13 July, 1971

REFERENCES

1. Клушин М. У., *Смазочно-охлаждающие жидкости при резание металлов.* Машгиз, 1961.
2. * * * Canad. Mach. and Manufact. News, *11* (1958).
3. Boillet J., *La lubrification dans la coupe des métaux.* Mécanique électr., *183* (1964).
4. Проскуряков Уу., *Тонко-распыленое охлаждение режущих инструтентов.* Машгиз, 1962.
5. Bulat A., *Răcirea sculelor aşchietoare armate cu metal dur cu un curent de aerosoli,* Maşini-unelte şi scule, *10* (1964).
6. Show M. C., *Méthodes d'utilisation des liquides utilisés à la coupe des métaux.* La machine moderne, *572* (1956).
7. Kasal J., *O nouă metodă de răcire la aşchierea metalelor.* Strojirenska vyroba, *3* (1962).
8. Plăhteanu B., *Cu privire la optimizarea caracteristicilor jetului de lichid pulverizat în procesele de răcire-ungere la aşchierea metalelor.* Construcţia de maşini, *11* (1968).
9. Plăhteanu B., Condrea I., *Contribuţii la studiul răcirii-ungerii prin pulverizarea lichidelor la joasă presiune în strunjirea profilată a rolelor de rulmenţi.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XIV (XVIII)**, *3–4*, 563–568 (1968).

CONTRIBUŢII LA APLICAREA RĂCIRII-UNGERII CU LICHID PULVERIZAT LA JOASĂ PRESIUNE, LA STRUNJIREA PROFILATĂ A ELEMENTELOR DE RULMENŢI

(Rezumat)

Avînd în vedere particularităţile procesului de răcire-ungere prin pulverizare de lichid în jet de aer comprimat s-a întreprins un studiu experimental privind influenţa parametrilor caracteristicí ai jetului asupra procesului de aşchiere la strunjirea profilată a elementelor de rulmenţi.

Încercările de laborator şi cele uzinale au urmărit stabilirea parametrilor caracteristici ai jetului care oferă un regim optimizat de pulverizare, comportarea la funcţionare îndelungată a instalaţiei precum şi gradul de stabilitate a jetului pulverizat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Seria IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.93

CONTRIBUŢII LA STUDIUL UNGHIULUI DE DEGAJARE REAL DIN PROCESELE DE AŞCHIERE[1])

DE

VITALIE BELOUS şi MIRCEA COZMÎNCĂ

1. Introducere

În prezent, unghiul de degajare funcţional γ_f se defineşte ca unghiul dintre planul normal la direcţia instantanee a vitezei relative dintre sculă şi piesă în punctul considerat, denumit şi plan de presiune [1], şi planul tangent la faţa de degajare. Conform acestei definiţii, expresia generală a unghiului de degajare funcţional, funcţie de parametrii geometrici constructivi, are forma [2] :

$$\cos\gamma_f = \frac{V_x(\operatorname{tg}\lambda\cos K - \operatorname{tg}\gamma_N\sin K) + V_y(\operatorname{tg}\gamma_N\cos K + \operatorname{tg}\lambda\sin K) + V_z}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\gamma_N+\operatorname{tg}^2\lambda)(V_x^2+V_y^2+V_z^2)}}, \tag{1}$$

în care V_x, V_y şi V_z sînt cele trei componente rectangulare ale vitezei mişcării relative dintre sculă şi piesă, iar γ_N, λ şi K sînt, respectiv, unghiul de degajare normal constructiv, unghiul de înclinare constructiv şi unghiul de atac constructiv în punctul considerat de pe tăiş.

Unghiul de degajare funcţional se poate exprima şi funcţie de unghiurile constructive de degajare măsurate în plan transversal γ_x, şi longitudinal γ_y, şi funcţie de cosinusurile directoare a_v, b_v şi c_v, ale direcţiei mişcării relative V, prin relaţia stabilită de Zoltan Duca [1] :

$$\cos\gamma_f = \frac{a_v\operatorname{tg}\gamma_x - b_v\operatorname{tg}\gamma_y + c_v}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma_x+\operatorname{tg}^2\gamma_y}}. \tag{2}$$

Cele două relaţii prezintă neajunsul principal că nu exprimă decît o valoare particulară a unghiului de degajare funcţional şi anume, cea măsurată după direcţia de cea mai mare pantă. Ori aşchia s-ar degaja după această direcţie, numai dacă ar fi perfect fluidă, ceea ce evident nu corespunde realităţii.

Faptul că relaţiile (1) şi (2) nu pot fi folosite în scopuri practice, rezultă şi din aplicarea acestora la un caz particular posibil ($\gamma_N = 0$, $V_x = 0$, $V_y = 0$, $c_v = 1$).

În conformitate cu (1) rezultă $\cos\gamma_f = \cos\lambda$, $\gamma_f = \lambda$; conform relaţiei (2), în care se înlocuiesc $\operatorname{tg}\gamma_x$ şi $\operatorname{tg}\gamma_y$ prin expresiile cunoscute ($\operatorname{tg}\gamma_x = \operatorname{tg}\gamma_N\sin K - \operatorname{tg}\lambda\cos K$, $\operatorname{tg}\gamma_y = \operatorname{tg}\gamma_N\cos K + \operatorname{tg}\lambda\sin K$) rezultă de asemenea că $\gamma_f = \lambda$.

---

1) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 2–4 iulie 1970.

Aceasta înseamnă că aşchia, degajîndu-se după linia de cea mai mare pantă, se deplasează în lungul tăişului, ceea ce evident nu este posibil.

După cum au arătat cercetările experimentale, aşchia se degajă după o direcţie care face în planul feţei de degajare un unghi η în raport cu normala N_1 la tăiş (fig. 1); în acest sens, după datele lui Stabler [3], acest unghi coincide ca valoare, cu unghiul de înclinare constructiv,

(3) $$\eta = \lambda .$$

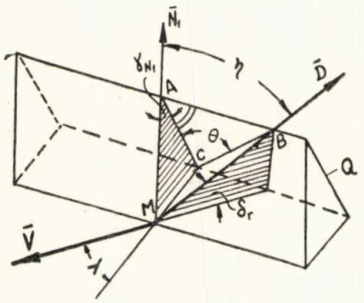


Fig. 1

Cercetările lui Rapier şi Wilkinson [4] au arătat că unghiul η poate căpăta valori mult mari decît unghiul de înclinare λ, iar cercetările recente, prin fotografiere, ale lui Russel şi Brown [5], au condus la concluzia că proiecţia θ a unghiului de deviaţie a aşchiei η pe un plan Q normal la planul de aşchiere şi paralel cu tăişul, este practic egală cu unghiul de înclinare λ (fig. 1), $\theta = \lambda$.

Întrucît, din triunghiurile dreptunghice ACM şi CAB rezultă că $\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \theta \cos \gamma_{N1}$, atunci

$$\eta = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} \theta \cos \gamma_{N1}) = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} \lambda \cos \gamma_{N1}),$$

în care γ_{N1} este unghiul de degajare constructiv măsurat într-un plan normal la tăiş.

Prin urmare, unghiul de deviere η, în conformitate cu datele lui Russel şi Brown, este totdeauna mai mic decît unghiul de înclinare λ.

Faptul că în general, unghiul de deviere nu coincide cu unghiul de înclinare, a fost scos în evidenţă şi de către Zorev [6], Shaw [7], precum şi de Bobrov [8], în ampla sa monografie referitoare la influenţa unghiului de înclinare asupra procesului de aşchiere. Pe baza cercetărilor experimentale, Bobrov ajunge la concluzia că unghiul de deviere este de cele mai multe ori, mai mare decît unghiul de înclinare λ (dar nu cu mai mult de 5°...7°) şi este cu atît mai mare, cu cît unghiul λ şi grosimea aşchiei este mai mare şi cu cît unghiul de degajare constructiv este mai mic.

Pe de altă parte, în conformitate cu recenta monografie sovietică referitoare la dezvoltarea ştiinţei despre aşchierea metalelor în URSS [9], unghiul de deviere η scade odată cu creşterea vitezei de aşchiere, în conformitate cu relaţia experimentală

(4) $$\eta = \lambda V^{-0,08}.$$

Din (4) rezultă că unghiul de deviere este totdeauna mai mic decît unghiul de înclinare, ceea ce ar fi în concordanţă şi cu rezultatele lui Russel şi Brown.

În total dezacord cu rezultatele experimentale prezentate mai înainte, se situează cele obţinute de către Balazs [10] conform cărora, complementul unghiului de deviere η, $\nu_c = \pi/2 - \eta$, variază în limite exagerat de largi, $\pm$ 90° (pentru variaţii minime de $\pm$ 15° ale unghiurilor γ_N şi λ), fără să se găsească vreo explicaţie plauzibilă pentru aceasta.

Din studiul rezultatelor experimentale ale autorilor citați, rezultă că în scopuri practice, în cazul aşchierii libere, se poate aproxima unghiul de deviere η prin unghiul de înclinare al tăişului λ.

Fenomenul de deviere a aşchiei se complică mult în cazul aşchierilor complexe, cînd la procesul de formare a aşchiei participă pe lîngă tăişul principal şi tăişuri secundare, auxiliare sau de trecere. În acest caz, se poate aplica metodica lui Bobrov [8], care are la bază ipoteza că direcția medie de degajare a aşchiei în planul feței de degajare, coincide cu direcția rezultantei forțelor de frecare de pe feţele de degajare ale tăişurilor, considerate ca acționînd independent, forțele de frecare considerîndu-se proporționale cu lățimile active corespunzătoare ale tăişurilor care participă în procesul de aşchiere.

În concluzie, direcția de angajare a aşchiei **D**, înclinată cu unghiul η în planul feței de degajare, față de normala $\mathbf{N}_1$ la tăiş, nu poate fi determinată numai pe considerente geometrice (ca linie de cea mai mare pantă), ci şi prin considerente bazate pe fizica procesului de formare a aşchiilor, aşa cum rezultă din datele experimentale prezentate mai înainte.

Pe această bază,aşa cum au arătat Merchant [12], Granovski [11], Stabler [3], Zorev [6], Rodin [13] etc., unghiul de degajare real γ_r trebuie măsurat în planul de degajare al aşchiei, adică în planul care conține direcția vitezei **V** a mişcării relative dintre sculă şi piesă şi direcția **D** de degajare a aşchiei şi se defineşte ca unghiul dintre un plan normal la direcția vitezei **V** (plan de presiune) şi planul tangent la fața de degajare în punctul M considerat de pe tăiş.

Conform acestei definiții, unghiul real de aşchiere $\delta_r = \pi/2 - \gamma_r$ se va măsura între direcția vitezei **V** şi direcția de degajare a aşchiei **D**, fiind dat de relația lui Zorev [6]

$$\delta_r = \arccos (\cos \lambda \cos \eta \cos \delta_{N1} + \sin \lambda \sin \eta), \tag{5}$$

au de relația lui Rodin [13]

$$\sin \gamma_r = \cos \delta_r = 1 - \cos^2 \lambda (1 - \sin \gamma_{N1}), \tag{6}$$

în care se consideră $\eta \approx \lambda$, semnificația notațiilor fiind: λ – unghiul de înclinare constructiv η – unghiul de deviere a aşchiei în planul feței de degajare, δ_{N1} – unghiul de aşchiere constructiv, măsurat într-un plan normal la tăiş, γ_{N1} – unghiul de degajare constructiv, măsurat într-un plan normal la tăiş.

Neajunsul principal al acestor relații îl constitue lipsa de generalitate, ca urmare a faptului că la deducerea lor s-a considerat că viteza de aşchiere **V** este cuprinsă în planul tăişului (planul de aşchiere constructiv) ceea ce este valabil numai în cazurile particulare, cînd $V_x = V_y = 0$ şi $V_z = V$.

În cele ce urmează se stabileşte o expresie generală pentru calculul unghiului de degajare funcțional real, atunci cînd în raport cu sistemul ortogonal constructiv de referință al sculei x, y, z, apar toate cele trei componente posibile, V_x, V_y şi V_z ale vitezei mişcării relative, funcție de parametrii geometrici constructivi.

2. Expresia generală a unghiului de degajare funcțional real γ_r

Pentru deducerea relației generale, care să exprime dependența unghiului de degajare funcțional real γ_r funcție de parametrii geometrici constructivi λ, γ_{N1}, γ_N şi de unghiul de deviere η se va folosi schematizarea din fig. 2, care reprezintă o vedere în planul de bază constructiv, o

vedere în planul tăișului, o vedere în planul feței de degajare, în care apare atît direcția de degajare a aşchiei **D**, direcția normală la tăiș $\mathbf{N}_1$, cît şi vectorul tangent la tăiș **T**, şi o secțiune în planul de degajare a aşchiei.

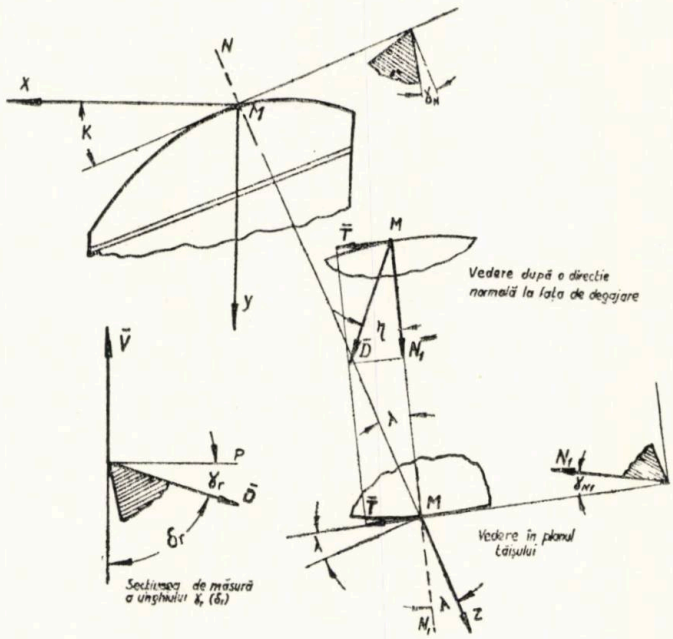


Fig. 2

Descompunînd versorul **D** după direcția tangentă la tăiș şi după cea normală la tăiș, se obțin vectorii **T** şi $\mathbf{N}_1$, de modul $\sin\eta$, respectiv $\cos\eta$; cu ajutorul proiecțiilor acestor vectori pe axele rectangulare x, y, z constructive ale sculei se găsesc proiecțiile rectangulare ale versorului **D**.

Întrucît vectorul $\mathbf{N}_1$ de modul $\cos\eta$ se scrie

$$\mathbf{N}_1 = (-\cos\eta\cos\gamma_{N1}\sin K - \cos\eta\sin\gamma_{N1}\sin\lambda\cos K)\,\mathbf{i} +$$
$$+ (\cos\eta\cos\gamma_{N1}\cos K - \cos\eta\sin\gamma_{N1}\sin\lambda\sin K)\,\mathbf{j} +$$
$$+ (-\cos\eta\sin\gamma_{N1}\cos\lambda)\,\mathbf{k},$$

iar vectorul **T**, de modul $\sin\eta$ este

$$\mathbf{T} = \sin\eta\cos\lambda\cos K\,\mathbf{i} + \sin\eta\cos\lambda\sin K\,\mathbf{j} - \sin\eta\sin\lambda\,\mathbf{k},$$

rezultă pentru **D** expresia

$$\mathbf{D} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{T} = (-\cos\eta\cos\gamma_{N1}\sin K - \cos\eta\sin\gamma_{N1}\sin\lambda\cos K + \\ + \sin\eta\cos\lambda\cos K)\,\mathbf{i} + (\cos\eta\cos\gamma_{N1}\cos K - \cos\eta\sin\gamma_{N1}\sin\lambda\sin K + \\ + \sin\eta\cos\lambda\sin K)\,\mathbf{j} - (\cos\eta\sin\gamma_{N1}\cos\lambda + \sin\eta\sin\lambda)\,\mathbf{k},$$

verificîndu-se a avea, efectiv, modul unitar.

Unghiul funcțional, real, de degajare γ_r, măsurat în planul de degajare a așchiei, definit de direcțiile **V** și **D**, este unghiul dintre planul de presiune, normal la **V**, și planul tangent la fața de degajare în punctul M și este complementul unghiului de așchiere funcțional real δ_r măsurat între direcția vitezei **V** și direcția **D** de degajare a așchiei, $\gamma_r = \pi/2 - \delta_r$, deci

$$\sin\gamma_r = \cos\delta_r = -\cos(\pi - \delta_r) = -\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}}{VD},$$

sau

$$\sin\gamma_r = \frac{(\cos\eta\cos\gamma_{N1}\sin K + \cos\eta\sin\gamma_{N1}\sin\lambda\cos K - \sin\eta\cos\lambda\cos K)\,V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} + \\ - \frac{(\cos\eta\cos\gamma_{N1}\cos K - \cos\eta\sin\gamma_{N1}\sin\lambda\sin K + \sin\eta\cos\lambda\sin K)\,V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} + \\ + \frac{(\cos\eta\sin\gamma_{N1}\cos\lambda + \sin\eta\sin\lambda)\,V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}. \tag{7}$$

Relația (7) reprezintă expresia generală a unghiului de degajare funcțional real γ_r, permițînd calculul acestui unghi pentru orice schemă de prelucrare prin așchiere, pornind de la parametrii mișcării relative V_x, V_y și V_z dintre sculă și piesă, de la parametrii geometrici constructivi ai sculei, anume γ_{N1} — unghiul de degajare constructiv măsurat în planul normal la tăișul sculei, calculabil funcție de unghiul de degajare normal constructiv γ_N din planul normal la tăișul aparent, prin relația cunoscută $\operatorname{tg}\gamma_{N1} = \operatorname{tg}\gamma_N\cos\lambda$; K — unghiul de atac constructiv; λ — unghiul de înclinare constructiv și η — unghiul de deviere a așchiei.

În cazurile cînd componentele V_x și V_y ale vitezei de așchiere sînt neglijabile, relația (7) capătă o structură mult mai simplă,

$$\sin\gamma_r = \cos\eta\sin\gamma_{N1}\cos\lambda + \sin\eta\sin\lambda, \tag{8}$$

care pusă sub forma (5) coincide cu relația lui Zorev [6]. Dacă se aproximează unghiul de deviere prin unghiul de înclinare constructiv λ, atunci rezultă relația (6) propusă de Rodin [13].

Întrucît la marea majoritate a sculelor, unghiul de degajare constructiv principal este unghiul γ_N măsurat în planul normal la tăișul aparent, este raționalcă și relațiile simplificate (8) și (6) să se exprime funcție de acest

unghi, legat de unghiul γ_{N1} prin relația $\operatorname{tg}\gamma_N = \operatorname{tg}\gamma_{N1}/\cos\lambda$, sau exprimînd sinusul prin tangentă, $\sin\gamma_{N1} = \sin\gamma_N\left(\sin^2\gamma_N + \dfrac{\cos^2\gamma_N}{\cos^2\lambda}\right)^{-1/2}$.

Introducînd expresia obținută în (8), rezultă

$$\sin\gamma_r = \cos\eta\cos\lambda\sin\gamma_N\left(\sin^2\gamma_N + \frac{\cos^2\gamma_N}{\cos^2\lambda}\right)^{-1/2} + \sin\eta\sin\lambda, \tag{9}$$

sau, punînd $\eta \approx \lambda$,

$$\sin\gamma_r = \cos^2\lambda\sin\gamma_N\left(\sin^2\gamma_N + \frac{\cos^2\gamma_N}{\cos^2\lambda}\right)^{-1/2} + \sin^2\lambda. \tag{10}$$

Reprezentînd suprafața $\gamma_r = \gamma_r(\lambda, \gamma_N)$ în conformitate cu relația (10),

$$\gamma_r = \operatorname{arc}\sin\left[\cos^2\lambda\sin\gamma_N\left(\sin^2\gamma_N + \frac{\cos^2\gamma_N}{\cos^2\lambda}\right)^{-1/2} + \sin^2\lambda\right] \tag{11}$$

se obține graficul din fig. 3, din care rezultă următoarele concluzii importante pentru practica proiectării:

a) valoarea unghiului de degajare real γ_r nu depinde de semnul unghiului de înclinare, fapt care rezultă și din relațiile (10) și (11);

b) influența valorii absolute a unghiului de înclinare λ asupra unghiului real de angajare γ_r este cu atît mai pronunțată, cu cît unghiul de degajare normal constructiv γ_N este mai mic; în acest sens, dacă pentru $\gamma_N = 50°$ și o variație a unghiului λ în limitele $\pm$ 50°, unghiul real de degajare γ_r variază în limite înguste ($\gamma_r = 50°...57°10'$), pentru $\gamma_N = -50°$, unghiul de degajare real variază în limite foarte largi ($\gamma_r = -50°... + 20°$);

c) influența unghiului de degajare normal constructiv γ_N asupra unghiului real de degajare γ_r este cu atît mai pronunțată, cu cît unghiul de înclinare este mai mic în valoare absolută, variația cea mai pronunțată obținîndu-se pentru $\lambda = 0$, cînd $\gamma_r = \gamma_N$;

d) se pot obține valori apropiate de cele optime ale unghiului de degajare real γ_r, chiar și în cazurile cînd din motive de rezistență-rigiditate a tăișului, unghiul de degajare normal constructiv capătă valori foarte mici; așa cum rezultă din reprezentarea din fig. 3, chiar și pentru valori de $-30°... -50°$ ale unghiului de degajare normal constructiv γ_N se pot obține valori pozitive ale unghiului real de degajare γ_r, cu condiția utilizării unor unghiuri de înclinare mari în valoare absolută ($\lambda > 30°...40°$).

O aplicație cunoscută în acest sens, o reprezintă construcțiile de freze cilindrice elicoidale cu dinți rari, la care în scopul realizării unor unghiuri de degajare reale suficient de mari, fără a slăbi prin aceasta tăișul, se folosesc unghiuri de înclinare foarte mari, $\lambda = \omega = 40°...60°$.

În fig. 3 domeniul unghiurilor de degajare reale nule este delimitat de planul S ($\gamma_r = 0$), care intersectează suprafața de variație a unghiului γ_r după curba C.

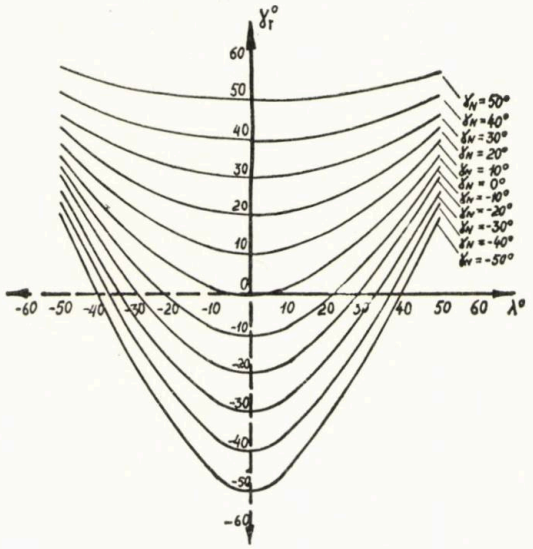


Fig. 4

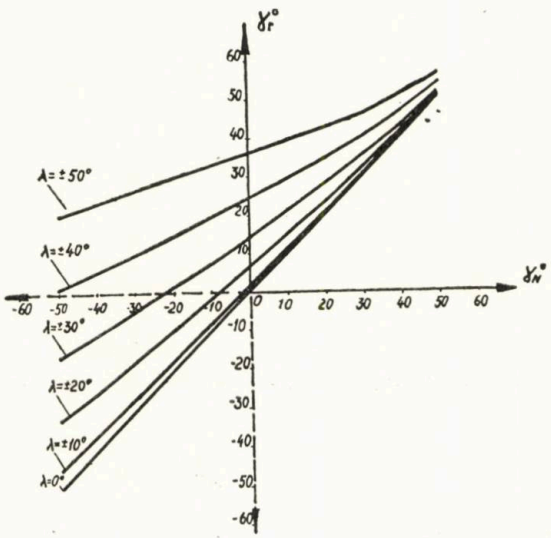


Fig. 5

Concluziile de mai sus rezultă și din studierea curbelor de variație a unghiului real de degajare γ_r funcție de unghiul λ (fig. 4) și de unghiul γ_N (fig. 5).

Relațiile (5), (6), (8)...(11) pot fi utilizate numai în cazurile cînd componentele V_x și V_y ale vitezei mișcării relative dintre sculă și piesă sînt neglijabile.

În cazurile cînd V_x și V_y nu pot fi neglijate, este necesară folosirea relației generale (7). În acest sens, în cazul filetării cu cuțitul de strung, componenta V_x capătă valori destul de mari, ca urmare a măririi avansului S, anume

$$V_x = \frac{Sn}{1000} \text{ m/min},$$

n fiind turația piesei, în timp ce în cazul operației de detalonare, componenta V_y nu mai poate fi neglijată, întrucit (fig. 6)

$$V_y = -\frac{KZn}{1000} = -\frac{\pi D \operatorname{tg} \alpha_{yv} n}{1000} \text{ m/min},$$

în care K este mărimea detalonării în mm, Z — numărul de dinți, n—turația, D—diametrul, iar α_{yv} — unghiul de așezare longitudinal constructiv în vîrful dintelui frezei detalonate.

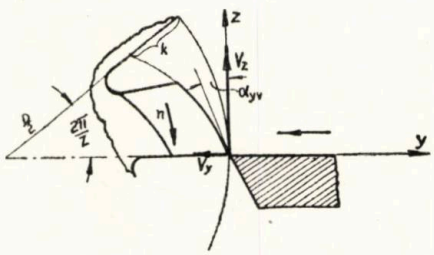


Fig. 6

De exemplu, dacă $\lambda = -15°$, $\gamma_{N1} = 10°$, $K = 45°$, $\operatorname{tg} \alpha_{yv} = \operatorname{tg} 11°20' \approx 0{,}2$, în conformitate cu relația simpficată (6), rezultă $\gamma_r \cong 13°30'$.

Relația exactă (7) conduce la valoarea $\gamma_r \cong 24°$, constatîndu-se prin urmare diferențe mari între valorile unghiurilor reale de degajare calculate prin intermediul celor două relații.

3. Concluzii

1. S-a stabilit o relație analitică riguroasă (7) pentru calculul unghiului real de angajare γ_r, atunci cînd se cunosc componentele vitezei mișcării relative dintre sculă și piesă V_z, V_y, V_z, unghiurile constructive ale tăișului γ_{N1}, λ, K, precum și unghiul de deviere η al așchiei, relație aplicabilă în special în cazurile cînd componentele V_x și V_y nu sînt neglijabile.

2. Pentru practica proiectării sculelor la care V_x și V_y sînt neglijabile în raport cu V_z, se pot folosi relațiile simplificate (9) sau (10), în care unghiul de degajare real este exprimat funcție de unghiurile de deviere a aşchiei, de înclinare şi de degajare constructiv, măsurat în planul secant normal la tăişul aparent.

3. Influența unghiului de degajare normal constructiv γ_N asupra unghiului real de degajare γ_r este cu atît mai pronunțată, cu cît unghiul de înclinare λ este mai mic în valoare absolută, valoarea unghiului de degajare real nedepinzînd de semnul unghiului de înclinare.

4. Influența valorii absolute a unghiului de înclinare λ asupra valorii unghiului real de degajare γ_r este cu atît mai pronunțată, cu cît unghiul de degajare normal constructiv γ_N este mai mic.

5. Se pot obține valori apropiate de cele optime ale unghiului de degajare real, chiar şi în cazurile cînd din motive de rezistență-rigiditate a tăiușului, unghiul de degajare normal constructiv capătă valori foarte mici, anume prin mărire corespunzătoare a valorii absolute a unghiului de înclinare, folosind în acest scop diagramele din fig. 3. sau 5.

Primită la 10 octombrie 1970

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini unelte și scule

BIBLIOGRAFIE

1. Duca Z., *Teoria sculelor aşchietoare.* Ed. tehn., Buc., 1967.
2. Belous V., *Proiectarea sculelor.* (I) *Bazele proiectării sculelor aşchietoare.* Inst. polit. Iaşi, 1968.
3. Stabler G. V., *The Fundamental Geometry of Cutting Tools.* Proc. of the Inst. of Mech. Eng., **165** (1951).
4. Rapier A. C., Wilkinson P. T., *Plasticity Report No. 156.* Mechanical Engineers Research Laboratory, East Kilbride, Glasgow, 1959.
5. Russel J. K., Brown R. H., *The Measurement of Chip Flow Direction.* Int. J. of Machine Tool Design and Research, **VI**, Pergamon Press, London, pp. 129-138.
6. Зорев Н. Н., *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, 1956.
7. Shaw M. C., Cook N. H., Smith P. A., *The Mechanics of Three Dimensional Cutting Operations.* Trans. of the ASME, **74** (1952).
8. Бобров В. Ф., *Влияние угла наклона главкой режущей кромки инструмента на процесс резания металлов.* М., 1962.
9. Зорев Н. Н. и др., *Развитие науки о резаний металлов.* Машиностроение, М., 1967.
10. Balazs F., *Efectul geometriei tăişului cuțitelor de strung asupra îndepărtării aşchiei.* Gép, *1*, 33-36 (1967).
11. Трановский Т. И, *Кинематика резания.* Машгиз, 1948.
12. Merchant M. E., *Basic Mechanics of the Metal Cutting Process.* Trans. of the ASME, **66** (1944).
13. Родин П. Р., *Проектирование и производство ретушего унструмента.* Техника, Киев, 1958.

ÉTUDE DE L'ANGLE D'ATTAQUE DE L'OUTIL DANS LE PROCESSUS DE COUPE

(Résumé)

En partant des plus récentes recherches dans le monde concernant la direction de l'écoulement du coupeau et de l'angle fonctionnel d'attaque de l'outil de coupe γ_f, on établie une relation générale pour la détermination de l'angle fonctionnel réel d'attaque γ_r.

On présente aussi les conclusions principales concernant la représentation de la fonction $\gamma_r = \gamma_r(\lambda, \gamma_N)$ et on délimite les possibilités d'usage correcte des relations mathématique pour la détermination de l'angle d'attaque en fonction des composants V_x, V_y, V_z et des angles constructifs de l'outil de coupe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 631.3

UNELE CONSIDERAŢII ASUPRA CINEMATICII ŞI DINAMICII ACŢIONĂRII ELECTRICE A TOCĂTOAREI DE FURAJE GROSIERE T. M. S.–6 M [1)]

DE

GR. TAŞCĂ

1. Introducere

În procesul tehnologic de conservare a furajelor şi de pregătire a hranei în zootehnie, tocătorile de furaje folosite pentru mărunţirea şi tocarea furajelor grosiere reprezintă unul dintre consumatorii importanţi de energie. Deşi folosirea tocătorilor este sezonieră, datorită volumului mare de furaje supuse prelucrării pe plan naţional şi totodată consumului specific de energie pentru tocare ridicat, necesitatea studierii reducerii consumului de energie prezintă o importanţă deosebită.

Problema reducerii consumului de energie în procesul de tocare prin alegerea corectă a puterii motorului de acţionare pe baza studiului cinematic şi dinamic, a constituit obiectul multor cercetări [4]... [6].

În aceste lucrări, alegerea puterii motorului însă se face pornind de la determinarea cuplului rezistent mediu static prin planimetrarea ariei determinată de curba de variaţie a cuplului rezistent şi axa absciselor, sau de la determinarea cuplului mediu de pe graficul de variaţie a acestuia ridicat cu ajutorul unui dispozitiv inscriptor.

În prezenta lucrare se propune o metodă de alegere a puterii motorului plecînd de la construirea graficului de sarcină a maşinii de lucru care utilizează parametrii cinematici şi dinamici ai sistemului de acţionare electrică caracteristici procesului tehnologic, cu respectarea condiţiilor de încălzire şi de verificare la cuplul maxim.

2. Stabilirea graficului de sarcină

Se cunoaşte că natura regimului de funcţionare a oricărei maşini de lucru reliefat prin reprezentarea graficului de sarcină constituie punctul principal de plecare în studiul proiectării acţionării sale electrice.

Datorită faptului că procesul tehnologic de tocare depinde de mulţi parametri care variază simultan, explicitarea acestor parametri funcţie de

---

[1)] Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 2–4 iulie 1970.

unghiul de rotaţie, ce ar fi convenabil din punctul de vedere al calculului, duce la obţinerea unor relaţii complexe care de multe ori nu-şi găsesc o utilizare practică imediată în proiectarea acţionărilor electrice. Din acest motiv în literatura de specialitate construirea graficelor de sarcină pentru tocătorile de furaje grosiere se fac cu ajutorul metodelor grafice sau grafo-analitice, admise ca precizie de calcul în proiectarea acţionărilor electrice.

Totuşi, explicitarea într-o formă analitică funcţie de unghiul de rotaţie a parametrilor principali care influenţează în mod sensibil cuplul rezistent util conduce la o mai bună conoaştere a naturii regimului de lucru.

Studiile teoretice şi experimentale efectuate asupra aparatului de tocare pentru furaje grosiere [4], [6] au stabilit următoarea relaţie pentru cuplul rezistent util

$$M_{ru} = q\,\Delta S\, r \cos\tau\,(1 + f' \operatorname{tg}\tau). \tag{2.1}$$

Se observă că cuplul rezistent util depinde de mai mulţi parametri, însă în mod sensibil este influenţat de mărimea activă a tăişului cuţitului ΔS, de mărimea razei vectoare r şi de unghiul de alunecare τ care caracterizează gradul de participare a forţei laterale la procesul de tăiere, deci influenţează în mod direct asupra presiunii specifice q cu care cuţitul acţionează asupra stratului de material. Pentru determinarea parametrilor cinematici şi dinamici necesari construirii graficului de sarcină şi explicitarea analitică funcţie de unghiul de rotaţie a lungimii active a tăişului cuţitului ΔS şi a razei vectoare r, se pleacă de la caracteristicile aparatului de tăiere a tocătoarei T.M.S. — 6 M tip 1970 (fig. 1) prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

h	l	h_1	d	e_0	R_0	R_1
100	380	30–60	140	340	660	725

a) *Determinarea expresiei analitice a lungimii active a tăişului cuţitului* $\Delta S = f(\theta)$. Pentru calcul se consideră numai zona a doua.

Din triunghiul $O_1 O_2 B'$, $\sphericalangle\, \delta = \gamma + \alpha$, de unde $\gamma = \delta - \alpha$.

Din triunghiul $O_1 O_2 A_0$; $\sin\alpha = \overline{O_1 O_2}/R_1$, iar din triunghiul $O_1 O_4 O$, $\overline{O_1 O_2} = R_0 \sin\theta - (h_0 + h_1)$, deci $\sin\alpha = (R_0/R_1)\sin\theta - (h_1 + h_0)/R_1$, de unde rezultă

$$\alpha = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{R_0}{R_1}\sin\theta - \frac{h_0 + h_1}{R_1}\right). \tag{2.2}$$

Din triunghiul O_1O_3B, $\sin\delta = \overline{O_1O_3}/R_1$, unde $\overline{O_1O_3} = \overline{O_1O_4} - \overline{O_3O_4} = R_0\sin\theta - h_0$; deci, $\sin\delta = (R_0/R_1)\sin\theta - (h_0/R_1)$, de unde

$$\delta = \arcsin\left(\frac{R_0}{R_1}\sin\theta - \frac{h_0}{R_1}\right). \tag{2.3}$$

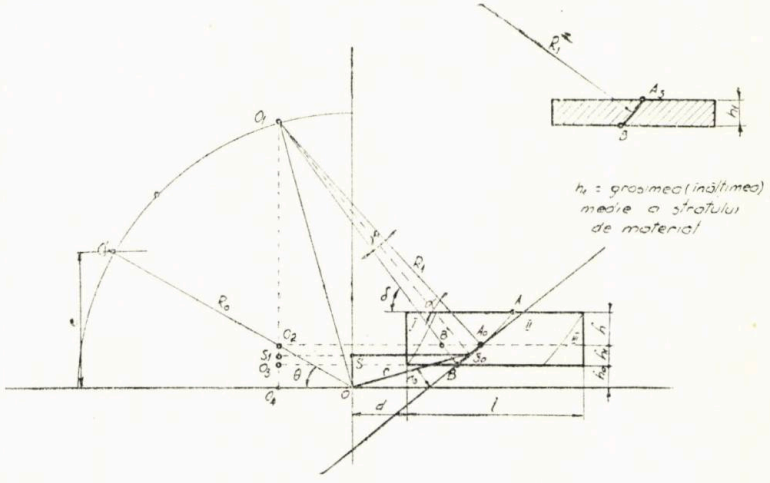


Fig. 1

Dezvoltînd în serie expresiile analitice ale unghiurilor α şi δ şi reţinînd primii doi termeni rezultă:

$$\gamma = \delta - \alpha = -\frac{h_0}{R_1} - \frac{1}{6}\frac{h_0^3}{R_1^3} + \frac{h_0 + h_1}{R_1} + \frac{1}{6}\frac{(h_0 + h_1)^3}{R_1^3} -$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\frac{R_0}{R_1^3}[(h_1 + h_0)^2 - h_0^2]\right\}\sin\theta + \left\{\frac{1}{2}\frac{R_0^2}{R_1^3}[(h_0 + h_1) - h_0]\right\}\sin^2\theta .$$

Cu notaţiile

$$K_0 = -\frac{h_0}{R_1} - \frac{1}{6}\frac{h_0^3}{R_1^3} + \frac{h_0 + h_1}{R_1} + \frac{1}{6}\frac{(h_0 + h_1)^3}{R_1^3} = 0{,}0556,$$

$$K_1 = \left\{\frac{1}{2}\frac{R_0}{R_1^3}\left[(h_0 + h_1)^2 - h_0^2\right]\right\} = 0{,}00726,$$

$$K_2 = \left\{\frac{1}{2}\frac{R_0^2}{R_1^3}\left[(h_0 + h_1) - h_0\right]\right\} = 0{,}0168,$$

rezultă expresia

$$\gamma = \delta - \alpha = K_0 - K_1 \sin\theta + K_2 \sin^2\theta. \tag{2.4}$$

Înmulțind expresia cu R_1 se obține relația $\Delta S = f(\theta) = \Delta l_a$, adică

$$\Delta S = \Delta l_a = R_1\gamma = R_1 K_0 - R_1 K_1 \sin\theta + R_1 K_2 \sin^2\theta, \tag{2.5}$$

în care Δl_a este lungimea activă a tăișului cuțitului la un moment dat.

b). *Determinarea expresiei analitice a razei vectoare* $r = f(\theta)$.

Din triunghiul OSS_0, $r^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SS_0}^2$, dar $\overline{SS_0} = \overline{S_1S_0} - \overline{S_1S}$; din triunghiul $O_1S_1S_0$, $\overline{S_1S_0}^2 + \overline{S_1O_1}^2 = R_1^2$, însă $\overline{S_1S_0} = R_0\cos\theta + \overline{SS_0}$ și $\overline{O_1S_1} = R_0\sin\theta - \overline{OS}$. După înlocuire, $(R_0\cos\theta + \overline{SS_0})^2 + (R_0\sin\theta - \overline{SO})_2 = R_1^2$, de unde

$$\overline{SS_0} = \sqrt{R_1^2 - (R_0\sin\theta - \overline{SO})^2} - R_0\cos\theta.$$

Prin înlocuire în expresia razei vectoare rezultă:

$$r = \sqrt{\overline{SO}^2 + \left[\sqrt{R_1^2 - (R_0\sin\theta - \overline{SO})^2} - R_0\cos\theta\right]^2}. \tag{2.6}$$

Cu ajutorul parametrilor q, f', tg τ, τ determinați experimental și prin calcul, și particularizînd unghiul θ pentru valori din 10 în 10 grade se obțin valori ale cuplului rezistent util cu ajutorul cărora se construiește diagrama de sarcină, $M_{ru} = f(\theta)$.

Rezultatele valorilor calculate și măsurate sînt centralizate în tabelul 2.

Variația cuplului rezistent util la arborele rotorului de tocare se indică în graficul de coordonate $M_{ru} = f(\theta)$ la scara: 1 cm = 30 N_m; 0,5cm = 0,175 rad.

După cum se poate observa din tabel și datorită particularităților constructive ale tipului de tocătoare analizat, cuplul maxim se obține pentru $\theta = 90°$, pentru care rezultă și valoarea maximă a lungimii active a tăișului cuțitului. Aceasta se poate evident constata studiind maximul funcției $\Delta la = f(\theta)$:

$$\frac{d\,\Delta la}{d\theta} = -R_1 K_1 \cos\theta + 2R_1 K_2 \sin\theta\cos\theta = 0,$$

de unde

$$\cos\theta = 0 \rightarrow \theta = 90°.$$

Înlocuind în relația (2.5) $\theta = 90°$ se obține lungimea maximă a părții active a tăișului cuțitului care participă la tăiere la momentul respectiv, $\Delta la_{max} = 0{,}0635$ m.

Dacă în relația (2.6) se înlocuiește $\theta = 90°$ rezultă mărimea razei vectoare corespunzătoare cuplului maxim, $r = 0{,}458$ m.

Tabelul 2

$\theta°$		40	50	60	70	80	90	95	98
γ	0	2,20	2,40	3,10	4	4,40	5,40	4	0
	rad	0,0384	0,0482	0,0542	0,0716	0,0772	0,086	0,0716	0
$R_1 = 0{,}725$ m									
Δla (m)		0,0278	0,035	0,0392	0,052	0,056	0,0624	0,0508	
r (m)		0,18	0,2	0,23	0,29	0,36	0,46	0,53	
τ	0	30	28	26	24	26	28	30	
	rad	0,524	0,488	0,454	0,418	0,454	0,488	0,524	
cos τ		0,866	0,882	0,898	0,913	0,898	0,882	0,866	
tg τ		0,577	0,531	0,487	0,445	0,487	0,531	0,577	
f'		0,1	0,0899	0,088	0,076	0,088	0,0899	0,1	
q		$9{,}5 \cdot 10^3$	$10{,}5 \cdot 10^3$	$11{,}1 \cdot 10^3$	$11{,}5 \cdot 10^3$	$11{,}1 \cdot 10^3$	$10{,}5 \cdot 10^3$	$9{,}5 \cdot 10^3$	
$r \cos \tau$ (m)		0,150	0,176	0,206	0,264	0,323	0,406	0,458	
M_{ru} (Nm)		41,2	64,8	88,2	158	202	275,4	223	0

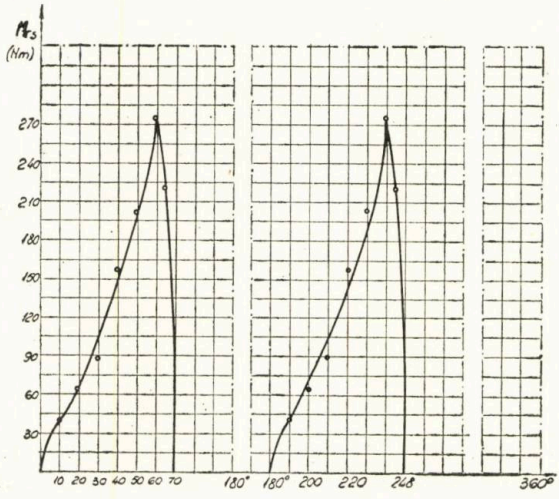


Fig. 2

Din analiza graficului de sarcină se constată că tăierea porţiunii de strat de furaj durează mai puţin de 0,02 sec; cuplul rezistent util variază brusc în acest interval, luînd valoarea maximă între 55...60°, după care scade repede la valoarea zero. Acest mod de variaţie a cuplului rezistent indică faptul că el trebuie tratat în calcule ca un cuplu de şoc.

Valorile nule ale cuplului rezistent util sînt corespunzătoare punctelor de tăiere în momentul intrării cuţitului în stratul de material şi la ieşirea din acesta.

Variaţia cuplului rezistent util între două limite ($M_{max} \dots M_{min}$) provoacă variaţia vitezei de rotaţie a rotorului de tocare, de asemenea între două limite ($n_{max} \dots n_{min}$), ceea ce are ca rezultat o funcţionare neuniformă a tocătoarei, în care caz masele de volant joacă un rol important.

3. Calculul puterii motorului de acţionare electrică

Cunoscînd modul de variaţie a cuplului rezistent util şi natura regimului de lucru, ca fiind de durată cu sarcini variabile în timp (neregulat), calculul puterii motorului de acţionare se face plecînd de la diagrama de sarcină a cuplului rezistent total redus la arborele motorului de acţionare, format din următoarele componente

$$M_{red} = M_{ru\ red} + M_1 + M_2 + M_0, \tag{3.1}$$

în care $M_{ru\ red}$ este cuplul rezistent util redus la arborele motorului de acţionare; M_1, M_2 sînt cuplurile rezistente utile reduse la arborele motorului de acţionare a aparatului de alimentare (M_1) şi respectiv a aparatului de evacuare a materialului tocat (M_2), determinate prin calcul şi avînd valorile $M_1 = 2{,}05$ Nm, $M_2 = 2$ Nm; M_0 — cuplul rezistent la mersul în gol redus la arborele motorului de acţionare determinat prin calcul şi experimental şi avînd valoarea $M_0 = 7{,}95$ Nm. În ipoteza unei alimentări uniforme şi din condiţii de productivitate optimă se poate considera că valoarea medie a acestor cupluri este constantă. În acest caz cuplul rezistent total redus la arborele de acţionare va fi format din două componente, una variabilă în timp dată de cuplul de şoc şi a doua constantă.

Dacă notăm

$$M_{0k} = M_0 + M_1 + M_2, \tag{3.2}$$

rezultă:

$$M_{red\ tot} = M_{ru\ red} + M_{0k}. \tag{3.3}$$

În raport cu condiţiile de exploatare şi avînd în vedere cele expuse mai sus se adoptă motorul electric cu rotorul în scurtcircuit avînd turaţia nominală $n_n = 2\,890$ rot/min. În acest caz raportul de transmisie are valoarea

$$i = \frac{n_m}{n_r} = \frac{2\,890}{500} = 5{,}78.$$

Randamentul transmisiei este $\eta = 0{,}96$.

Valorile parametrilor astfel calculaţi sînt prezentate centralizat în tabelul 3.

Tabelul 3

$M_{ru\ red}$ (Nm)	7,34	11,5	15,8	28,2	36,1	49,2	39,9
M_{0k} (Nm)	12						
$M_{red\ tot}$ (Nm)	19,34	23,5	27,8	40,2	48,1	61,1	51,9
t (sec)	$3,33.10^{-3}$	$6,66.10^{-3}$	$9,99.10^{-3}$	$13,32.10^{-3}$	$16,65.10^{-3}$	$19,98.10^{-3}$	$23,31.10^{-3}$

Curba de variație a cuplului rezistent total redus la arborele motorului de acționare se indică în graficul de coordonate $M_{red\ tot} = f(t)$ la scara: 1,0 cm = 10 Nm și 0,1 cm = $6,66 \times 10^{-4}$ sec.

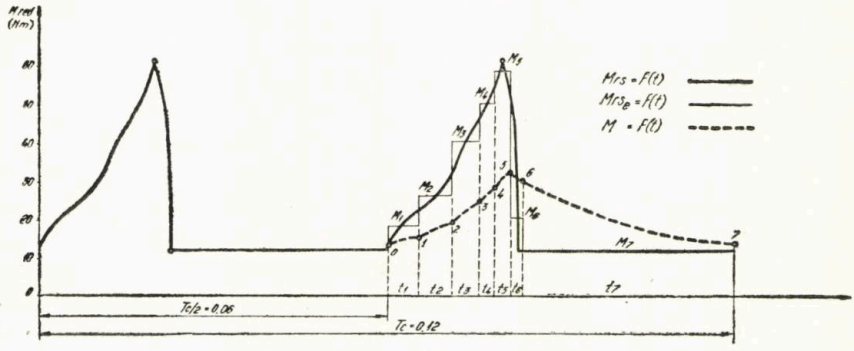


Fig. 3

Curba de variație a cuplului rezistent total neputînd fi exprimată printr-o relație analitică accesibilă calculului de alegere a puterii motorului, diagrama reală se înlocuiește cu o diagramă în trepte echivalentă din punctul de vedere al încălzirii (linia subțire în fig. 3.). Cuplul și timpii corespunzători fiecărei trepte sînt centralizați în tabelul 4.

Tabelul 4

M_i (Nm)	18	26	40	50	57	20	12
t_i (sec)	$4,66.10^{-3}$	6.10^{-3}	$4,66.10^{-3}$	$2,66.10^{-3}$	$2,66.10^{-3}$	2.10^{-3}	$36,7.10^{-3}$

Pentru alegerea prealabilă a puterii motorului se calculează cuplul mediu static ca medie ponderată cu relația:

$$M_{\text{med st}} = \frac{\sum_{1}^{n} M_i t_i}{\sum_{1}^{n} t_i} = \frac{\sum_{1}^{7} M_i t_i}{\sum_{1}^{7} t_i} = 19{,}85 \text{ Nm}. \tag{3.4}$$

Deoarece valoarea cuplului nominal al motorului este cuprinsă între 1,1 $M_{\text{med st}}$ şi 1,3 $M_{\text{med st}}$ [2], rezultă că pentru o apreciere preliminară se poate considera

$$M_n = 1{,}25\, M_{\text{med st}} = 24{,}8 \text{ Nm}; \tag{3.5}$$

acestui cuplu îi corespunde puterea:

$$P = \frac{M_n n_n}{9\,550} = 7{,}5 \text{ kW}. \tag{3.6}$$

Din catalog se alege motorul asincron cu rotorul în scurtcircuit tip (seria) *A. S. I.* — 132 *M* cu următoarele caracteristici:

$P_n = 7{,}5$ kW, $U_n = 380$ V, $I_n = 14{,}8$ A, $\eta = 87\%$, $\cos\varphi = 88\%$, $M_{\max}/M_n = 2{,}2$, $M_p/M_n = 1{,}8$, $I_p/I_n = 6{,}5$, $GD^2 = 0{,}392$ kgfms^2, $I_m = 0{,}01$ kg fm^2 $= 0{,}1$ Nm s^2.

a) *Verificarea motorului ales.* Întrucît curba de variaţie a cuplului motor nu poate urmări diagrama de variaţie propusă pentru cuplul rezistent total, pentru verificare este necesară construirea diagramei cuplului motor.

În ipoteza că motorul funcţionează pe porţiunea liniară a caracteristicii, unde există proporţionalitate între alunecări şi cuplurile dezvoltate de motor, expresia analitică a cuplului motor este dată de relaţia [1]:

$$M_i' = M_i + (M_{0i} - M_i)\, e^{-\frac{t_i}{T}}, \tag{3.7}$$

unde T este constanta electromecanică de timp şi are valoarea

$$T = \mathcal{J}_{\text{red}} \frac{S_n}{M_n} = 0{,}0162 \text{ sec}. \tag{3.8}$$

Particularizînd ecuaţia (3.7) pentru fiecare treaptă a diagramei echivalente, se obţin valorile iniţială şi finală ale cuplului motor corespunzătoare extremităţilor porţiunii de curbă pe fiecare interval, centralizate în tabelul 5.

Tabelul 5

t_i/T	0,288	0,371	0,288	0,1645	0,1645	0,1235	2,27
$e^{-t_i/T}$	0,75	0,692	0,75	0,847	0,847	0,866	0,104
M_i (Nm)	18	26	40	50	57	20	12
M_{0i} (Nm)	13,97	15	18,38	23,8	27,8	32,3	30,8
M_i' (Nm)	15	18,38	23,8	27,8	32,3	30,8	13,96

Curba de variație a cuplului motor este reprezentată pe graficul de sarcină (cu linie întreruptă) în fig. 3.

După cum se poate observa de pe grafic porțiunile de curbă de pe curba cuplului motor corespunzătoare fiecărui interval se pot aproxima prin drepte. În acest caz relația de calcul a cuplului echivalent mediu pătratic pe fiecare interval devine:

$$M_{ek} = \sqrt{\frac{M_{ki}^2 + M_{ki+1}^2 + M_{ki}\, M_{ki+1}}{3}}. \tag{3.9}$$

Rezultatele calculului sînt prezentate în tabelul 6.

Tabelul 6

M_{ki} (Nm)	13,97	15	18,38	23,8	27,8	32,3	30,8
M_{ki+1} (Nm)	15	18,38	23,8	27,8	32,3	30,8	13,96
M_{ki}^2	195	225	336	556	774	1 222	948
M_{ki+1}^2	225	336	556	774	1 222	948	194
$M_{ki}\, M_{ki+1}$	209	278	437	662	900	994	462
M_{ek}	14,5	16,5	21,1	25,8	30,3	31,3	22,9

b) *Verificarea la încălzire.* Condiția de verificare la încălzire cere să fie satisfăcută relația:

$$M_e = \sqrt{\frac{\sum_1^n M_{ek_i}^2\, t_i}{\sum_1^n t_i}} \leqslant M_n, \tag{3.10}$$

unde M_{ek_i} este un cuplu mediu corespunzător fiecărui interval în raport cu curba cuplului motor (tabelul 6). Înlocuind valorile din tabel rezultă

$$M_e = 22{,}4\ \text{Nm} < M_n = 24{,}8\ \text{Nm}. \tag{3.11}$$

Motorul ales face față condițiilor de încălzire impuse de diagrama de solicitare deoarece $M_n > M_e$.

c) *Verificarea la suprasarcină.* Se impune ca cuplul maxim de pe curba de solicitare a motorului să fie mai mic sau cel mult egal cu cuplul maxim dezvoltat de motor în ipoteza că se admite o cădere de tensiune $\Delta U \leqslant 15\,\%$, $M_{\max} = 0{,}85^2\, \lambda\, M_n = 39{,}3$ Nm, deci

$$M_{\max\ \text{motor}} = 39{,}3\ \text{Nm} > M_5' = 32{,}3\ \text{Nm}. \tag{3.12}$$

Deoarece cel mai mare cuplu dezvoltat de motor pentru acoperirea diagramei de solicitare este egal cu $1{,}3\, M_n$ și cum motorul ales poate dezvolta un cuplu maxim de $2{,}2\, M_n$, se poate conchide că alegerea a fost

jndicioasă şi motorul va face faţă solicitărilor mecanice impuse de natura procesului tehnologic de tocare a furajelor.

Consideraţiile cinematice şi dinamice analizate mai sus şi rezultatele obţinute au fost verificate experimental.

4. Concluzii

1. Micşorarea razei de curbură a cuţitului şi modificarea poziţiei cuţitului în planul său de lucru pentru obţinerea unui unghi de alunecare mai mare, odată cu schimbarea poziţiei gurii de alimentare chiar sub linia orizontală a diametrului rotorului de tocare, duce la micşorarea cuplului rezistent util de tocare, în special prin atenuarea valorilor maxime. Rezultă astfel o reducere a consumului specific de energie şi o îmbunătăţire a funcţionării tocătoarei.

2. Din punctul de vedere al acţionării electrice tocătoarea se comportă ca o maşină de lucru cu şocuri de sarcină, deci cu un grad pronunţat de neuniformitate a funcţionării; de aceea se recomandă ca numărul de cuţite să fie mai mare (4...6).

3. Chiar în cazul unui număr mic de cuţite [2], datorită sistemului de transmisie a mişcării, momentul de volant total redus la arborele motorului conferă sistemului de acţionare o ameliorare substanţială a gradului de neuniformitate a mişcării ($M_{max} = 1{,}3\, M_n$), nefiind necesare mase suplimentare de volant.

Primită la 12 iulie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de utilizări electrice
şi automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Boţan N. V., *Bazele calculului acţionării electrice.* Ed. tehn., Buc., 1970.
2. Damsker D., *Acţionarea electrică.* EES, Buc., 1955.
3. Boţan N. V., *Cum se aleg motoarele electrice pentru acţionarea mecanismelor industriale.* Ed. tehn., Buc., 1963.
4. Мельников С. В., *Механизация животноводческих ферм* Изд. „Колос", Москва, 1969
5. Căproiu M., ş. a., *Curs de maşini şi instalaţii zootehnice.* Ed. Inst. polit. Timişoara, 1970.
6. Базенков Б. Ф, *Практикум по механизации животноводческих ферм.* Изд. „Колос", Ленинград, 1965.
7. * * * Analele I. C. M. A., X, Ed. Agrosilvică de Stat, pp. 229 — 249.

SOME CONSIDERATIONS ABOUT THE KINEMATICS AND DYNAMICS OF THE ELECTRIC DRIVE OF ROUGH FORAGE CHOPPER

(Summary)

The paper deals with the design of the electric drive of a rough forage chopper. Some possibilities of approximating the load diagrams of the chopper are given and the power of the drive motor is chosen on the basis of the equivalent motor couple.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z, 621.88

CONSIDERAŢII TEORETICE ŞI VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A CAPACITĂŢII DE STRÎNGERE A DISPOZITIVELOR CU MECANISME CU PENE ŞI PLUNJERE MULTIPLE

DE

N. GOJINEŢCHI şi EMIL UNCHEŞEL

1. Generalităţi. Construcţia şi funcţionarea dispozitivelor cu pene şi plunjere multiple

Dispozitivele cu mecanisme autocentrante de tipul cu pene şi plunjere multiple se întîlnesc, de obicei, sub formă de dornuri pentru poziţionarea şi strîngerea pieselor cu suprafeţe de bazare cilindrice interioare, neprelucrate, sau brut prelucrate.

Construcţia tipică şi modul de funcţionare a unui dorn cu pene şi plunjere multiple sînt prezentate în fig. 1.

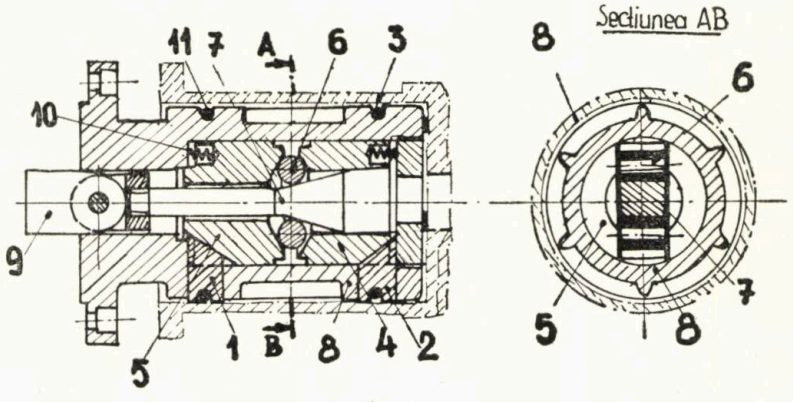


Fig. 1

Semifabricatul *3* este bazat şi strîns după suprafaţa cilindrică interioară de către grupele de plunjere *1*, *2*, montate în corpul *8* al dispozitivului. Grupele de plunjere *1*, *2* sînt acţionate de către bucşele *4* şi *5*, în care sînt

practicate o serie de lăcașuri ajustate sub formă de pene. Fiecare grupă de plunjere are, de obicei, cîte trei plunjere. Bucșele *4* și *5* sînt deplasate de către rolele *6*, împinse în direcție radială de pana multiplă *7*, ultima fiind montată, cu posibilitate de oscilație, în tija *9*. Prin tija *9* se face legătura dintre dorn și mecanismul de acționare care poate fi manual sau de tip pneumatic, hidraulic, etc. Arcurile *11*, care înconjoară dornul, au rolul de a menține, respectiv de a retrage plunjerele, după ce piesa prelucrată a fost eliberată în vederea scoaterii din dispozitiv. Arcurile de compresiune *10* deplasează bucșele *5* și *6* în poziție inițială.

2. Considerații teoretice

O primă parte a lucrării se referă la elaborarea unei relații de calcul a forței totale de strîngere dezvoltată de acest tip de dispozitiv, în funcție de forța de acționare și caracteristicile constructiv-funcționale ale mecanismului cu pene și plunjere multiple. Schema de calcul este prezentată în fig. 2. În această schemă, elementele componente ale mecanismului au fost notate cu aceleași cifre ca și în fig. 1; în plus, s-au utilizat notațiile: P — forța de acționare; $Q = Q_1 + Q_2$ — forța totală de strîngere; Q_1, Q_2 — forțele radiale de strîngere dezvoltate de grupele de plunjere *1*, *2*; P_1, P_2 — forțele axiale cu care sînt acționate bucșele *4*, *5* de către rolele 6; H_i, V_i — componentele orizontale și verticale ale diverselor rezultante R_i dintre forțele de frecare F_i și reacțiunile normale N_i; α_i — unghiurile suprafețelor înclinate ale pieselor ce intră în componența mecanismului cu pene și plunjere; φ_i, φ_{ie} — unghiuri de frecare, respectiv unghiuri de frecare echivalente între diversele suprafețe ale dispozitivului.

Pentru simplificarea calculelor s-au neglijat forțele dezvoltate de către arcurile *10* și *11* (fig. 1), precum și forțele ale căror momente tind să rotească rolele *6*, întrucît mărimea lor este neglijabilă în raport cu restul forțelor ce apar în mecanismul de strîngere.

Ca urmare a acțiunii forței P asupra penei *7*, suprafețele înclinate ale acesteia vor exercita forțele R_6 asupra fiecăreia din cele două role *6*. Forța R_6 va fi echilibrată de reacțiunile R_4, R_5 ale bucșelor *4* și *5*. Fiecare din reacțiunile R_i reprezintă, așa cum s-a arătat și mai înainte, rezultanta dintre forțele normale N_i și forțele de frecare F_i, ultimele avînd sensul contrar sensului în care piesa tinde să se deplaseze. Fiecare reacțiune R_i poate fi descompusă în componentele orizontale H_i și verticale V_i.

Cele două role vor acționa asupra bucșei *5* cu forța $P_1 = 2H_5$ și asupra bucșei *4* cu forța $P_2 = 2H_4$. Pentru calcul, bucșa *5* și sistemul de plunjere *1* se va echivala cu un mecanism cu pană și plunjer în consolă, reprezentat în fig. *2b*, iar bucșa *4* și sistemul de plunjere *2* cu mecanismul cu pană și plunjer în consolă reprezentat în fig. *2c*.

În cele ce urmează se stabilește o relație între forța de acționare P și forța totală de strîngere $Q = Q_1 + Q_2$ pe care o dezvoltă dispozitivul.

Considerînd succesiv în echilibru piesele mecanismului de strîngere şi utilizînd una sau ambele ecuaţii de proiecţie, pe orizontală şi pe verticală, ale forţelor care acţionează asupra acestora se obţine:

a) pentru pana 7; proiecţia pe orizontală a forţelor care o solicită conduce la relaţia:

$$H_6 = \frac{P}{2}; \tag{1}$$

b) pentru rolele 6; proiecţiile pe orizontală şi verticală ale forţelor R_4, R_5, R_6, considerate concurente prin neglijarea forţelor care tind să dea momente de rotire, conduc la ecuaţiile

$$\Sigma H_i = H_4 - H_5 + H_6 = 0, \tag{2}$$

$$\Sigma V_i = V_4 + V_5 - V_6 = 0. \tag{3}$$

Din fig. 2*a*, ţinînd seama şi de (1), se obţine:

$$V_4 = \frac{H_4}{\operatorname{tg}(\alpha_4 - \varphi_4)}, \tag{4}$$

$$V_5 = \frac{H_5}{\operatorname{tg}(\alpha_5 - \varphi_5)}, \tag{5}$$

$$V_6 = \frac{H_6}{\operatorname{tg}(\alpha_6 + \varphi_6)} = \frac{P}{2\operatorname{tg}(\alpha_6 + \varphi_6)}. \tag{6}$$

Înlocuind pe $V_4 \ldots V_6$ în ecuaţiile (2), (3) şi avînd în vedere (1) se obţine:

$$H_4 - H_5 + \frac{P}{2} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{H_4}{\operatorname{tg}(\alpha_4 - \varphi_4)} + \frac{H_5}{\operatorname{tg}(\alpha_5 - \varphi_5)} = \frac{P}{2\operatorname{tg}(\alpha_6 + \varphi_6)}. \tag{8}$$

Sistemul de ecuaţii (7), (8) determină forţele H_4 şi H_5 în funcţie de forţa de acţionare P, anume:

$$H_4 = \frac{P}{2} A, \tag{9}$$

$$H_5 = \frac{P}{2}(1 + A), \tag{10}$$

în care s-a notat:

$$A = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha_6 + \varphi_6) - \operatorname{ctg}(\alpha_5 - \varphi_5)}{\operatorname{ctg}(\alpha_4 - \varphi_4) + \operatorname{ctg}(\alpha_5 - \varphi_5)}. \tag{11}$$

Odată determinate H_4 și H_5, forțele P_1 și P_2, care acționează asupra bucșelor *4*, *5* (fig. 1 și 2*a*) pot fi calculate cu relațiile:

$$P_1 = 2H_5 = P(A+1), \tag{12}$$

$$P_2 = 2H_4 = PA. \tag{13}$$

În continuare, ansamblul de piese format din grupa plunjerelor *1* și bucșa *5* a fost asimilat cu un mecanism cu pană și plunjer în consolă prezentat în fig. 2*a*, iar ansamblul format din grupa plunjerelor *2* și bucșa *4*, cu un alt mecanism cu pană și plunjer în consolă, prezentat în fig. 2*c*.

Particularizînd relația de calcul a forței de strîngere a mecanismelor cu pană și plunjer în consolă [2], [3], [5], pentru cazurile prezentate în fig. 2*b* și 2*c* și ținînd seama și de (12), (13) se obține:

$$Q_1 = P(A+1)\frac{\cos(\alpha_1+\varphi_2+\varphi_{3e})}{\cos\varphi_{3e}\sin(\alpha_1+\varphi_2)}, \tag{14}$$

$$Q_2 = PA\frac{\cos(\alpha_2+\varphi_2'+\varphi_{3e}')}{\cos\varphi_{3e}'\sin(\alpha_2+\varphi_2')}. \tag{15}$$

Pentru stabilirea relațiilor (14), (15) s-au admis următoarele ipoteze: $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$ și deci $\cos\varphi_1 = 1$ (penele sînt frezate în exteriorul bucșelor *4*, *5*, iar suprafețele pe care, conform relației generale de calcul, trebuiau să apară forțele de frecare la care se referă unghiurile de frecare φ_1, φ_1' sînt libere și, ca atare, aceste forțe sînt nule). De asemenea,

$$\begin{cases} \varphi_{3e} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3l_1}{h}\operatorname{tg}\varphi_3\right), \\ \varphi_{3e}' = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3l_2}{h}\operatorname{tg}\varphi_3\right), \end{cases} \tag{16}$$

în care φ_3, φ_3' sînt unghiurile de frecare dintre plunjerele *1* și corpul *8*, respectiv între plunjerele *2* și corpul *8*.

Avînd în vedere că, din motive de ordin tehnologic, plunjerele din grupele *1* și *2* precum și bucșele *4*, *5* sînt identice ca formă constructivă și calitate a suprafețelor în frecare, se poate admite că

$$l_1 = l_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \varphi_2 = \varphi_2', \quad \varphi_{3e} = \varphi_{3e}'. \tag{17}$$

Ținînd seama de relațiile (14) și (15), precum și de ipotezele de mai sus, forța totală de strîngere dezvoltată de dispozitiv va fi $Q = Q_1 + Q_2$, de unde

$$P = Q\frac{1}{1+2A}\frac{\cos\varphi_{3e}\sin(\alpha_1+\varphi_2)}{\cos(\alpha_1+\varphi_2+\varphi_{3e})}, \tag{18}$$

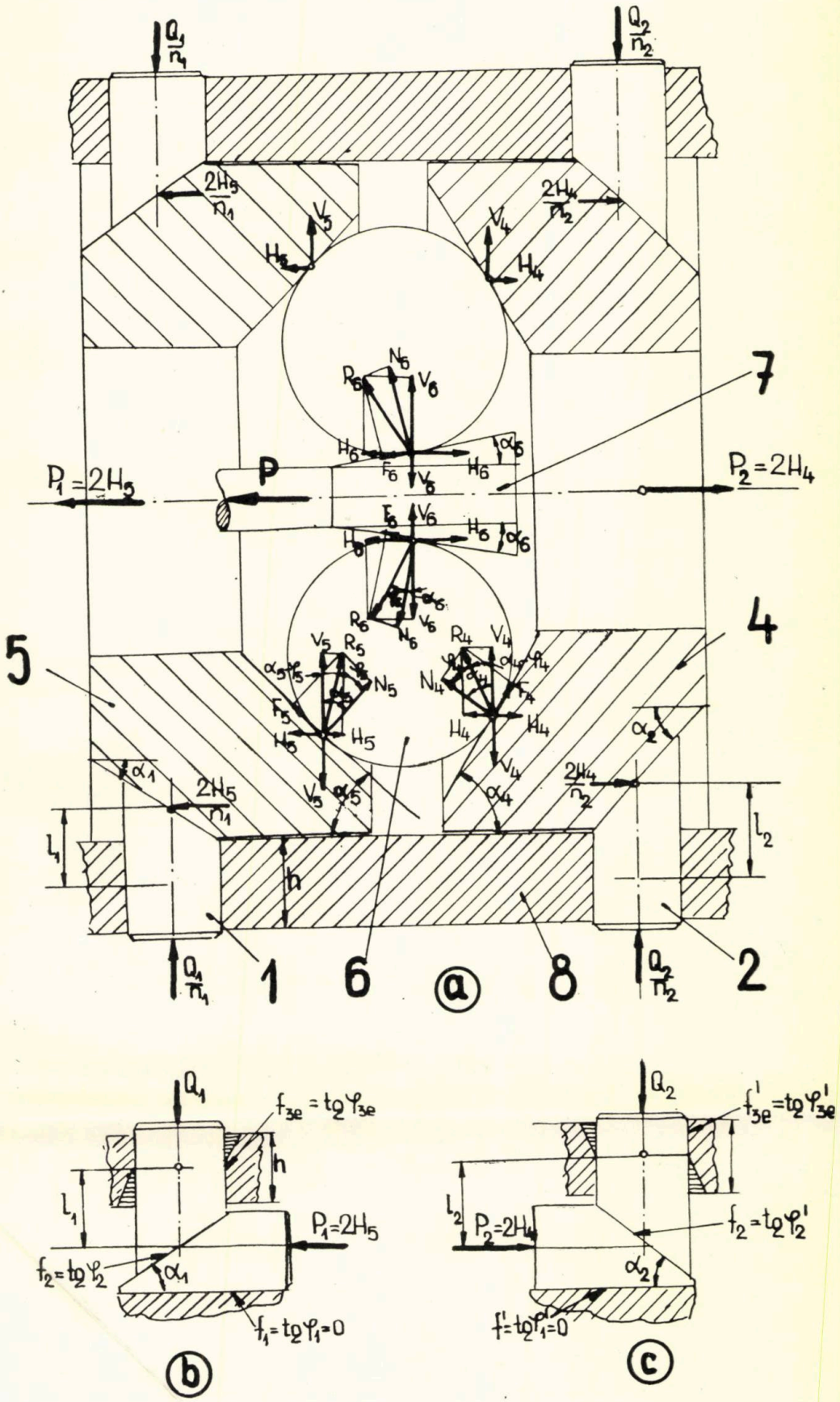
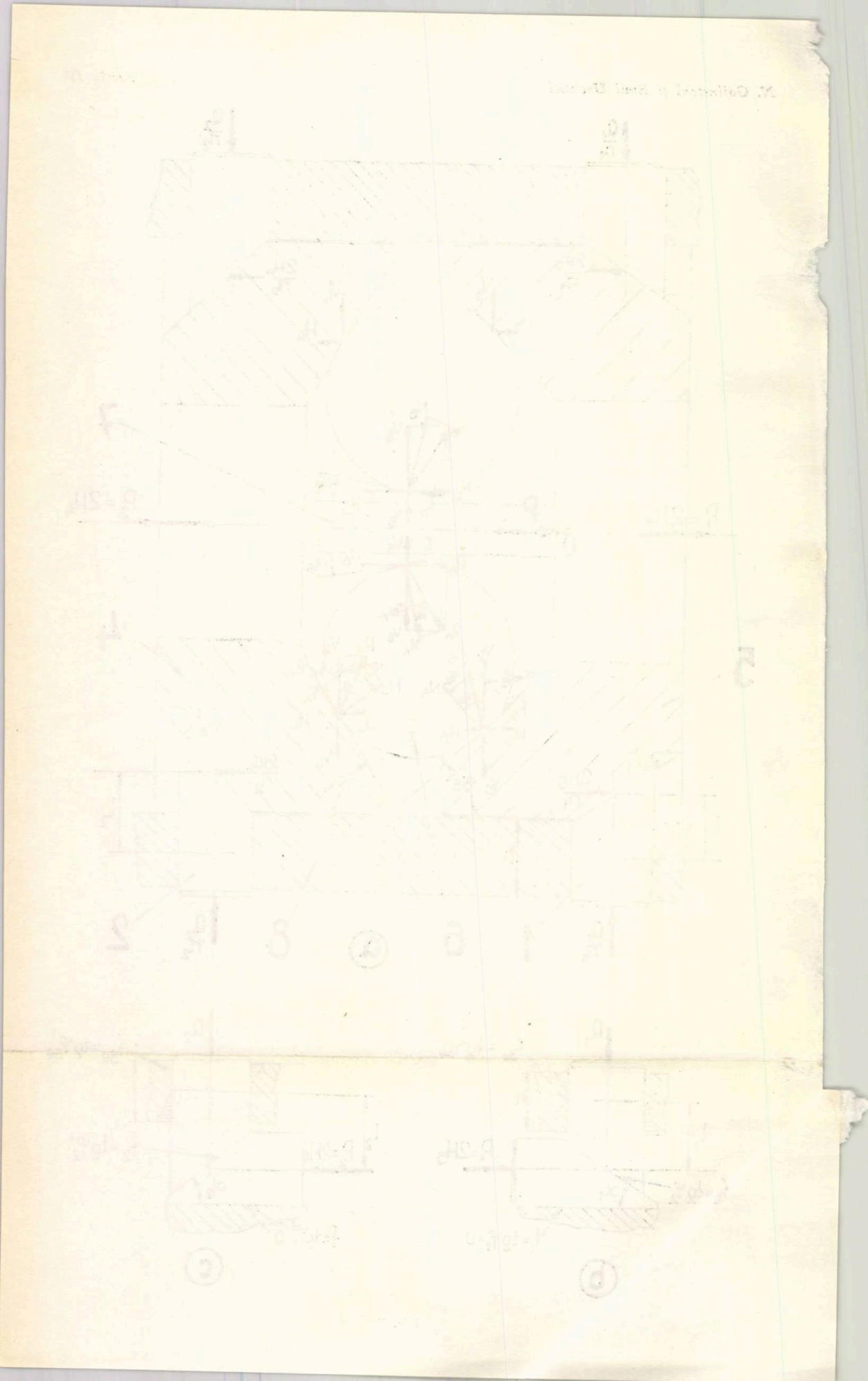

Q1/n1
Q2/n2
2H5/n1
2H4/n2
V5
H5
V4
H4
N6
R6
V6
H6
F6
α6
P1=2H5
P
P2=2H4
7
5
4
R5
N5
F5
R4
N4
F4
α1
α2
α4
α5
l1
l2
h
1
6
8
2
a
Q1
f3e = tg φ3e
P1=2H5
f2=tg φ2
f1=tg φ1=0
b
Q2
f'3e=tg φ'3e
P2=2H4
f2=tg φ'2
f'=tg φ'1=0
c

Fig. 2



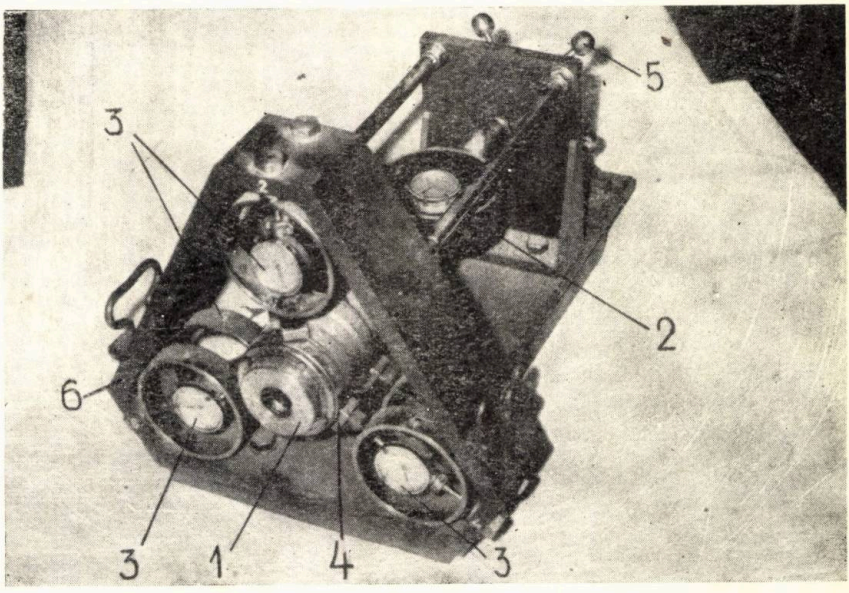


Fig. 3

care reprezintă relaţia generală de calcul a forţei de acţionare P în funcţie de forţa totală de strîngere Q pe care trebuie s-o dezvolte dornul cu plunjere.

Întrucît, practic, bucşele *4*, *5* sînt identice ca formă şi calitate a suprafeţelor în frecare, relaţia (18) poate fi încă simplificată considerînd:

$$\alpha_4 = \alpha_5 \quad \text{şi} \quad \varphi_4 = \varphi_5 , \tag{19}$$

în care caz

$$P = Q \frac{\operatorname{tg}(\alpha_6 + \varphi_6)}{\operatorname{tg}(\alpha_5 - \varphi_5)} \frac{\cos \varphi_{3\varepsilon} \sin(\alpha_1 + \varphi_2)}{\cos(\alpha_1 + \varphi_2 + \varphi_{3\varepsilon})} . \tag{20}$$

Interpretarea relaţiei generale de calcul (18) permite formularea unor concluzii de ordin teoretic asupra randamentului şi optimizării parametrilor constructiv-funcţionali ai acestor tipuri de dispozitive.

Mai important însă, în primul rînd, este să se constate în ce măsură consideraţiile teoretice făcute şi relaţiile de calcul stabilite oglindesc legăturile reale ce există între forţele de acţionare şi forţele de strîngere dezvoltate de aceste tipuri de dispozitive, respectiv în ce măsură relaţiile stabilite sînt valabile pentru calculele de proiectare.

3. Instalaţia pentru experimentări

Pentru verificarea experimentală a relaţiei generale de calcul (18), a fost concepută instalaţia prezentată în fig. 3 [6].

Instalaţia cuprinde dispozitivul cu pene şi şase plunjere *1*, conceput pe baza schemei constructive din fig. 1, dinamometrul *2* pentru măsurarea forţei de acţionare P şi dinamometrele *3* pentru măsurarea forţelor de strîngere dezvoltate de fiecare plunjer în parte. Dinamometrele de tip inelar, dotate cu comparatoare cu valoarea diviziunii de 0,01 mm, au fost calculate astfel încît să se obţină o sensibilitate corespunzătoare şi funcţionare în limitele rezistenţei elastice pînă la încărcări de 300 kgf pentru fiecare plunjer. Etalonarea dinamometrelor s-a făcut cu un dinamometru de tip „Watzau". Capetele de măsurare *4* ale dinamometrelor *3* pot fi deplasate pe direcţie radială pentru a fi aduse în contact cu suprafeţele exterioare ale plunjerelor. Forţa de acţionare P, măsurată de dinamometrul *1*, este dezvoltată de un mecanism cu şurub manevrat de la mînerul *5*. Toate elementele componente arătate mai sus sînt montate pe un cadru metalic *6*, avînd o rigiditate corespunzătoare.

4. Metoda de lucru şi rezultatele experimentărilor

Cu instalaţia prezentată în fig. 3 s-au efectuat experimentări asupra capacităţii de strîngere a dornurilor cu plunjere.

Variind şi măsurînd valoarea forţei de acţionare P, s-au determinat în parte forţele Q^i_{1ef}, Q^i_{2ef}, dezvoltate de cele şase plunjere, i reprezentînd numărul de ordine al plunjerului din grupele *1* şi *2*. Variaţia forţelor de strîngere dezvoltate de fiecare plunjer în parte se poate vedea în fig. 4,

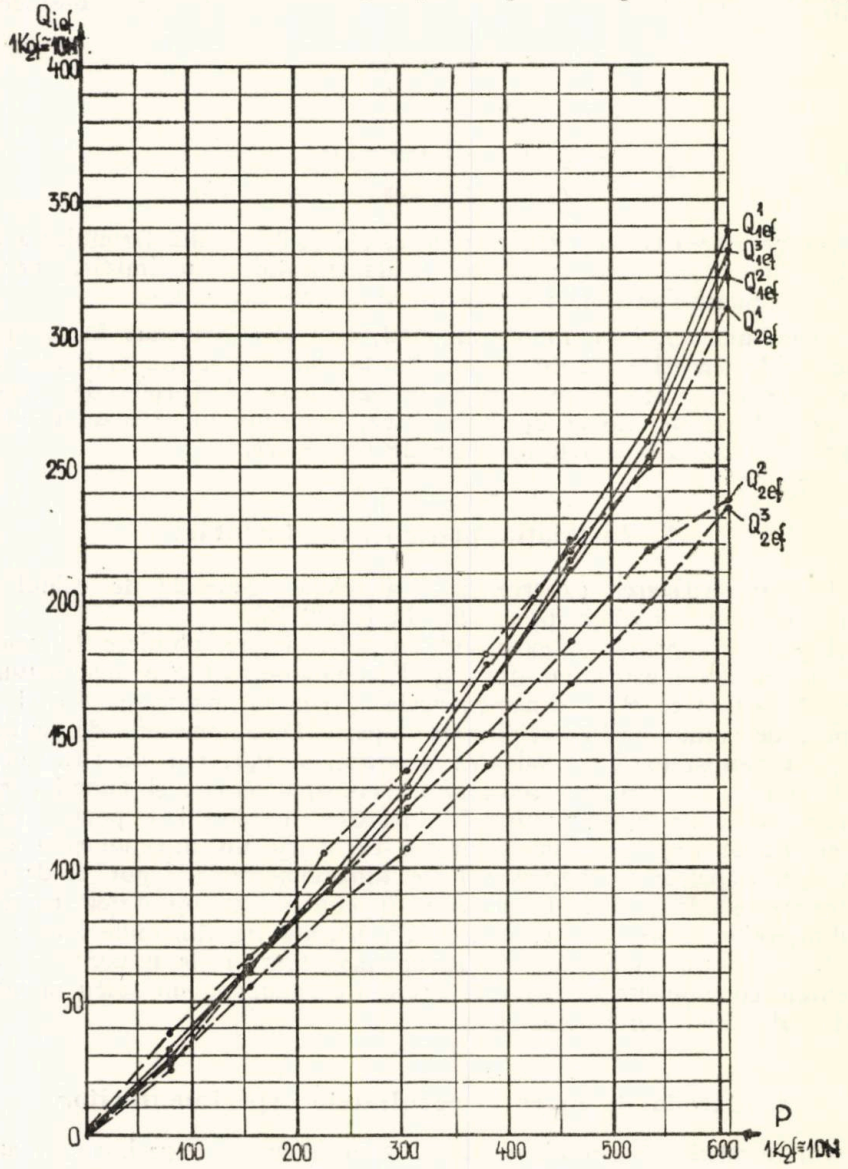


Fig. 4

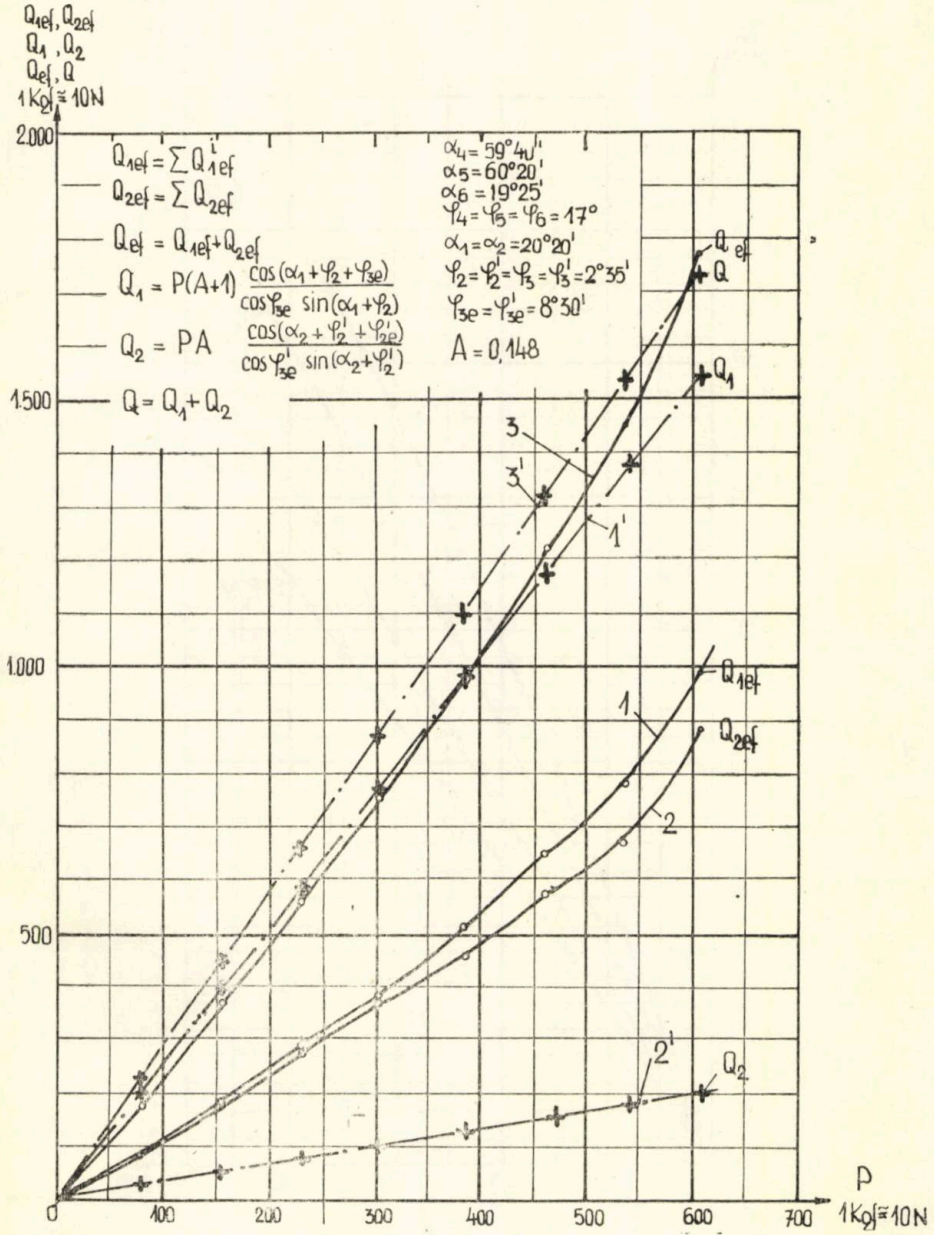

Q1ef, Q2ef
Q1 , Q2
Qef, Q
1 Kgf ≅ 10 N
2.000
1.500
1.000
500
0
100
200
300
400
500
600
700
P
1 Kgf ≅ 10 N
Q1ef = Σ Q1ef
Q2ef = Σ Q2ef
Qef = Q1ef + Q2ef
Q1 = P(A+1) cos(α1+φ2+φ3e) / cosφ3e sin(α1+φ2)
Q2 = PA cos(α2+φ'2+φ'2e) / cosφ'3e sin(α2+φ'2)
Q = Q1 + Q2
α4 = 59°40'
α5 = 60°20'
α6 = 19°25'
φ4 = φ5 = φ6 = 17°
α1 = α2 = 20°20'
φ2 = φ'2 = φ3 = φ'3 = 2°35'
φ3e = φ'3e = 8°30'
A = 0,148
Q ef
Q
Q1
3
3'
1'
Q1ef
1
Q2ef
2
2'
Q2

Fig. 5

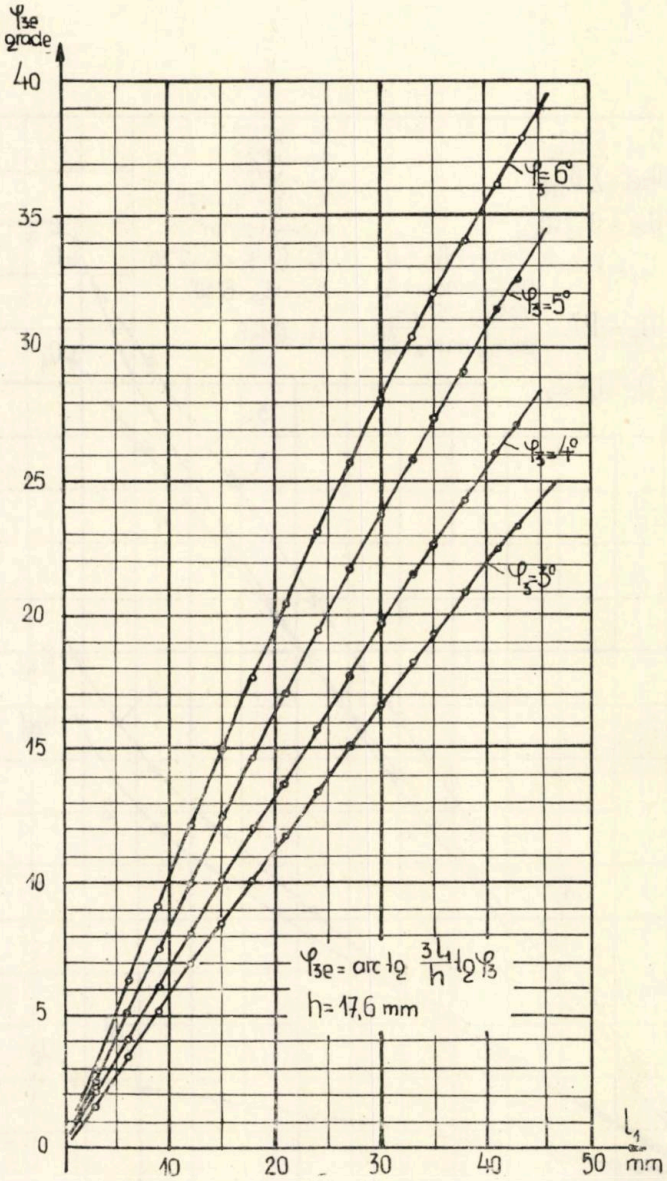

φ3e grade
40
35
30
25
20
15
10
5
0
10
20
30
40
50
mm
L1
φ3=6°
φ3=5°
φ3=4°
φ3=3°
φ3e = arc tg 3L1/h tg φ3
h = 17,6 mm

Fig. 6

iar variaţiile forţelor efective de strîngere Q_{1ef} şi Q_{2ef} dezvoltate de cele două grupe pe plunjere, precum şi a forţei totale efective de strîngere Q_{ef} dezvoltată de dispozitivul studiat sînt prezentate în fig. 5, prin curbele *1*, *2*, *3*.

În continuare s-au determinat prin măsurări directe elementele ce intră în relaţiile de calcul (14), (15), (16), (18), (20), admiţîndu-se pentru unghiurile de frecare valorile medii utilizate curent în calculele de proiectare pentru piese din oţel pe oţel cu suprafeţe netede prelucrate, tratate termic, rectificate şi unse cu vaselină [7], adică:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \text{arc tg } 0{,}045 = 2°35',$$

respectiv

$$\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = \text{arc tg } 0{,}3 = 17°$$

pentru piese din oţel cilindrice pe suprafeţe plane. Aceste valori medii corespund indicaţiilor date de literatură şi apropie cel mai mult curba de variaţie a forţei totale efective de strîngere Q_{ef} (curba *3*, fig. 5) de curba de variaţie a forţei totale de strîngere Q (curba *3'*, fig. 5), stabilită prin calcul, pentru aceleaşi valori ale forţei de acţionare P, utilizînd relaţia (18). Cu valorile astfel adoptate s-au calculat în continuare valorile medii ale unghiului de frecare echivalent $\varphi_{3e} = \varphi'_{3e}$ cu relaţia (16), ale coeficientului A cu relaţia (11) şi ale forţelor de strîngere Q_1, Q_2 dezvoltate de cele două grupe de plunjere, cu ajutorul relaţiilor (14), (15). Variaţiile forţelor Q_1, Q_2, calculate cu valorile medii ale unghiurilor de frecare $\varphi_1 \dots \varphi_6$, φ_{3e} şi A, au fost reprezentate grafic prin curbele *1'*, *2'* din fig. 5.

Datele studiului teoretic şi experimental, astfel prelucrate, ne permit să facem următoarele observaţii:

a) Variaţia liniară a forţei de strîngere Q în funcţie de forţa de acţionare P calculată din relaţia generală (18), corespunde realităţii, fapt dovedit prin experimentări (curbele *3*, *3'* din fig. 4), în special pentru forţe de strîngere pînă la 1000 kgf.

b) Forţele de strîngere Q_{1ef} şi Q_{2ef} dezvoltate efectiv de grupele de plunjere *1* şi *2* (curbele *1*, *2*, fig. 5), plasate în secţiuni diferite ale semifabricatului poziţionat şi strîns cu acest dispozitiv, nu sînt egale între ele, fapt ce rezultă şi din relaţiile (14) şi (15) pentru Q_1, Q_2 (curbele *1'*, *2'*, fig. 5), în special la valori mai mari de 300 kgf ale forţei de acţionare P. Discrepanţa evidentă dintre curbele *1*, *1'*, *2*, *2'*, reprezentînd variaţiile forţelor de strîngere calculate şi efectiv dezvoltate de cele două grupe de plunjere, trebuie pusă pe seama unor fenomene de deformaţii locale, care schimbă substanţial direcţia şi mărimea reacţiunilor şi a forţelor de frecare reprezentate în fig. 2.

Din această observaţie trebuie reţinut faptul evident, stabilit atît teoretic cît şi experimental, că forţele dezvoltate de cele două grupe de plunjere diferă, fapt care constituie o caracteristică a dispozitivelor studiate.

c) Variaţiile „aproximativ" liniare ale forţelor Q_{1ef}, Q_{2ef} şi Q_{ef} trebuie puse pe seama variaţiilor concomitente ale unghiurilor de frecare echiva-

lente în funcţie de dimensiunile l_1, l_2 (fig. 2), precum şi a coeficientului A în funcţie de unghiurile de frecare φ_4, φ_5, φ_6, care la rîndul lor depind de presiunea de contact dintre role şi elementele cu care ele vin în contact. Variaţiile unghiurilor de frecare echivalente $\varphi_{3e} = \varphi'_{3e}$, în funcţie de l_1, pentru diverse valori ale unghiului de frecare φ_3, sînt ilustrate în fig. 6, iar ale coeficientului A, în funcţie de unghiurile de frecare $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6$, în fig. 7. Variaţia dimensiunilor $l_1 = l_2$ şi a caracterului frecării (uscată

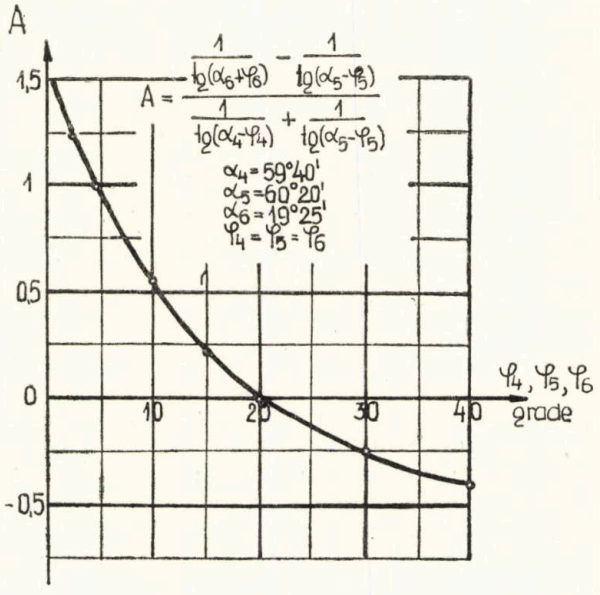


Fig. 7

sau lichidă) duce la modificări ale coeficientului de frecare echivalent φ_{3e}, pentru dispozitivul studiat, de la 3°...30°, adică la creşteri de 1 000 %. De asemenea, adoptarea gentru calcule a unor unghiuri de frecare φ_4, φ_5, φ_6 necorespunzătoare poate duce la erori de calcul de pînă la 150 %.

5. Concluzii

1. Dispozitivele cu pene şi plunjere dezvoltă forţe de strîngere inegale în secţiunile în care sînt plasate plunjerele, aceasta influenţînd precizia de prelucrare a pieselor de tipul ţevilor. Dată fiind capacitatea lor de a dezvolta forţe mari şi de a prelua variaţii dimensionale importante, folosirea acestor dispozitive este raţională pentru semifabricate brut prelucrate în operaţiile de degroşare, şi eventual de finisare, pentru piese cu rigiditate mare.

2. Fenomenele complexe de solicitare la care sînt supuse elementele mecanismului de strîngere influenţează substanţial asupra mărimii forţelor de strîngere dezvoltate de aceste dispozitive. Din acest motiv, elementele care intră în relaţia de calcul a forţei de strîngere Q sau a forţei de acţionare P trebuie adoptate cu mult discernămînt, astfel încît valorile obţinute să fie acoperitoare în vederea asigurării unei dimensionări corecte a elementelor constructive care intră în componenţa acestor mecanisme de strîngere.

3. Relaţiile de calcul ale forţei totale de strîngere, precum şi ale forţei de acţionare, pot fi considerate corespunzătoare pentru proiectarea acestor dispozitive, în condiţiile utilizării unei valori corecte pentru unghiurile de frecare (φ_i, φ_{ie}), care aşa cum e dovedit-o studiul experimental, datorită mărimii lor, se apropie de valoarea unghiurilor de înclinare α_i a suprafeţelor elementelor care transmit şi amplifică forţa de acţionare, în cadrul acestui mecanism. Influenţa unghiurilor de înclinare α_i asupra coeficientului de amplificare poate fi suficient de precis stabilită prin discutarea relaţiilor de calcul elaborate în cadrul prezentului studiu.

Primită la 14 iulie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Stănescu I., Tache V., *Proiectarea şi construcţia dispozitivelor.* EDP, Buc. 1964.
2. Stănescu I., Tache V., *Dispozitive pentru maşini-unelte.* Ed. tehn., Buc., 1969.
3. Korsakov V. S., *Calculul şi proiectarea dispozitivelor în construcţia de maşini.* IDT, Buc., 1960 (trad. din l. rusă).
4. Болотин Н. Л., Костромин Ф. П., *Основы конструктирования приспособлений.* Машгиз, М., 1951.
5. Gojineţchi N., Rener Al., *Curs de proiectarea şi construcţia dispozitivelor.* Partea I şi II, Institutul politehnic Iaşi, 1970.
6. Bejinaru D., *Determinarea experimentală a forţelor de strîngere a dornurilor cu plunjere.* Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică din cadrul Festivalului studenţesc „Gh. Asachi", Institutul politehnic Iaşi, 1969.
7. * * * *Îndrumător matematic şi tehnic.* Ed. tehn., Buc., 1964.

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES ET VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA CAPACITÉ DE SERRAGE DES DISPOSITIFS AVEC MÉCANISMES À CLAVETTES ET PLONGEURS MULTIPLES

(Résumé)

On établit une relation de calcul pour la force de serrage développée par les dispositifs à clavettes et plongeurs et on vérifie à l'aide d'un dispositif expérimental la capacité de serrage des poinçons à plongeurs, en confrontant les données expérimentales obtenues avec les relations de calcul proposées.

Les relations de calcul établies et la méthodologie expérimentale permettent l'interprétation des phénomènes ayant lieu dans les mécanismes de serrage à clavettes et plongeurs, afin d'adopter correctement les élements pour les calculs d'établissement d'un projet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVII (XXI), fasc. 3–4, 1971
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 621.951.3

DETERMINAREA CONSTANTELOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE LA BURGHIEREA OŢELURILOR ROMÂNEŞTI, GRUPA OŢEL PENTRU CUŢITE, STAS Nr. 1699–50

DE

AUREL RĂILEANU, EMIL UNCHEŞEL şi N. GOJINEŢCHI

Continuînd lucrările pentru stabilirea constantelor şi a exponenţilor din relaţiile forţei axiale şi a momentului de răsucire:

$$P = C_P\, d^{x_P} s^{y_P}, \tag{1}$$

$$M = C_M\, d^{x_M} s^{y_M}, \tag{2}$$

autorii au determinat aceşti parametri la oţelurile pentru cuţite: OSL 1, OSL 2, OSL 3 şi OSL 4(7) Cr, furnizate în anul 1966 de întreprinderea „Industria Sîrmei"—Cîmpia Turzii.

Experienţele au fost executate pe o maşină de găurit G 40 („Înfrăţirea"—Oradea), folosind burghie româneşti (F. S. Rîşnov) din oţel rapid, avînd unghiul de înclinare a canalului elicoidal $\omega = 30°$, raportul dintre grosimea miezului şi diametru constant (0,15) şi canalele lustruite. Burghiele s-au ascuţit după metoda conică astfel încît să aibă următoarea geometrie: $\alpha_{ex} = 12°$, $\psi = 55°$, $2\varkappa = 120°$. În timpul găuririi, materialul de încercat era fixat pe un dinamometru tip Paramonov [1].

Cu datele experimentale obţinute s-au trasat diagramele în coordonate dublulogaritmice (fig. 1 ... 8) pe baza cărora s-au determinat valorile exponenţilor x_P, y_P, x_M, y_M şi ale constantelor, după metoda cunoscută [1], [2]. Aceste valori sînt indicate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

Oţel pentru cuţite STAS nr. 1699–50	H_B kgf/mm²	x_{Pm}	y_{Pm}	C_{Pm}
OSL 1	217	1,052	0,745	86,07
OSL 2	269	1,050	0,775	108,23
OSL 3	274	1,049	0,793	115,24
OSL 4 (7) Cr	253	1,004	0,743	115,37

Tabelul 2

Oţel pentru cuţite STAS nr. 1699—50	H_B kgf/mm²	x_{Mm}	y_{Mm}	C_{Mm}
OSL 1	217	1,629	0,704	8,42
OSL 2	269	1,536	0,722	13,10
OSL 3	274	1,510	0,766	13,85
OSL 4 (7) Cr	253	1,615	0,703	10,57

Primită la 14 iulie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh., Rener Al., Bul. Inst. polit. Iaşi, **VII (XII)**, *1–2*, 345–348 (1962)
2. Răileanu A., Nicolescu D., Bul. Inst. polit. Iaşi, **IX (XIII)**, *3—4*, 331–334 (1963)

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE ET DES MOMENTS CONCERNANT LE PERÇAGE DES ACIERS ROUMAINS STANDARDISÉS, STAS No. 1699–50

(Résumé)

On détermine les valeurs des paramètres C_P, x_P, y_P et C_M, x_M, y_M, définis par. les relations (1) et (2), pour les aciers : OSL 1, OSL 2, OSL 3, OSL 4 (7) Cr, STAS 1699–50.

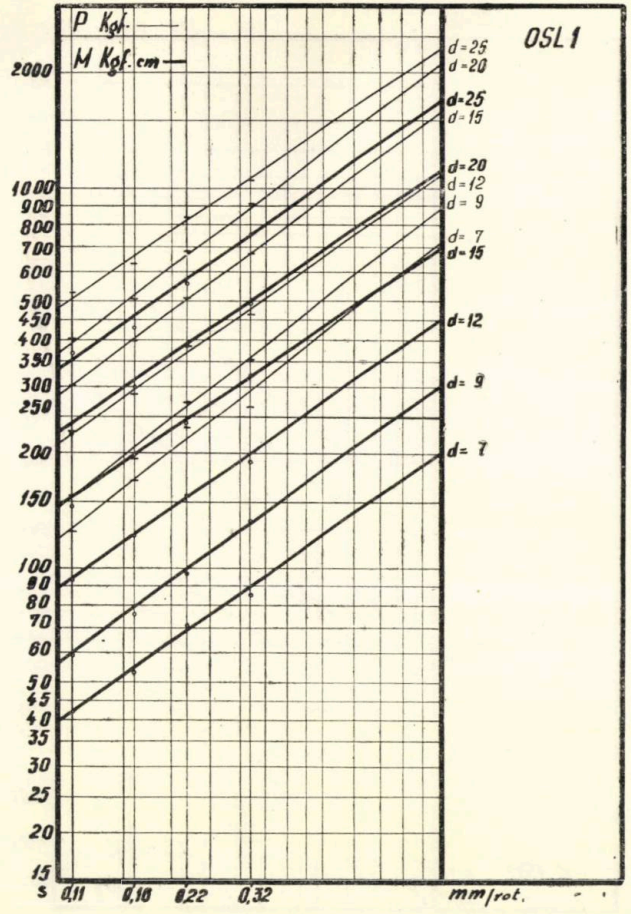

P Kgf.
M Kgf. cm
OSL 1
d=25
d=20
d=25
d=15
d=20
d=12
d=9
d=7
d=15
d=12
d=9
d=7
2000
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
s 0,11 0,16 0,22 0,32
mm/rot.

Fig. 1

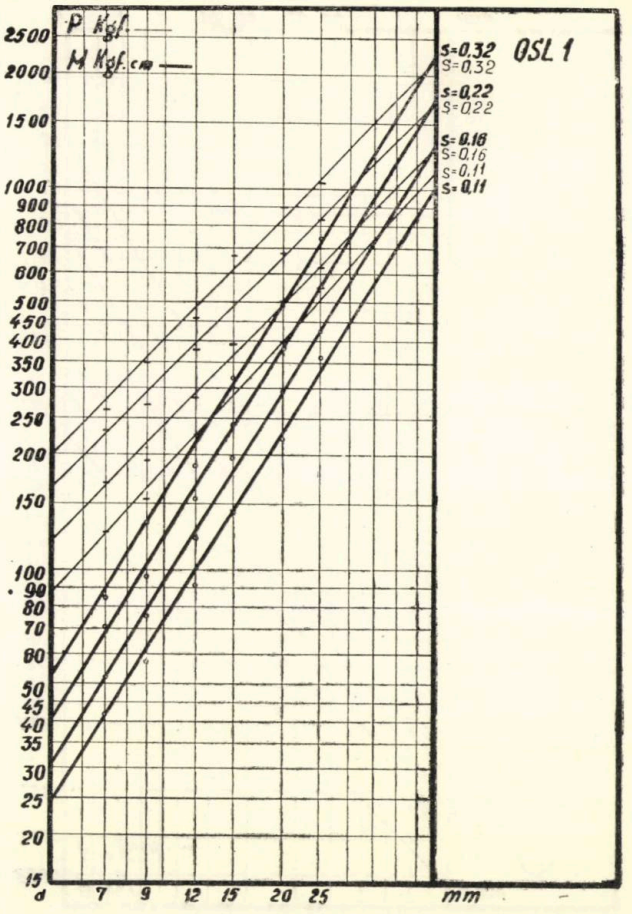

P Kgf.
M Kgf. cm
OSL 1
S=0,32
S=0,32
S=0,22
S=0,22
S=0,16
S=0,16
S=0,11
S=0,11
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
d 7 9 12 15 20 25
mm

Fig. 2

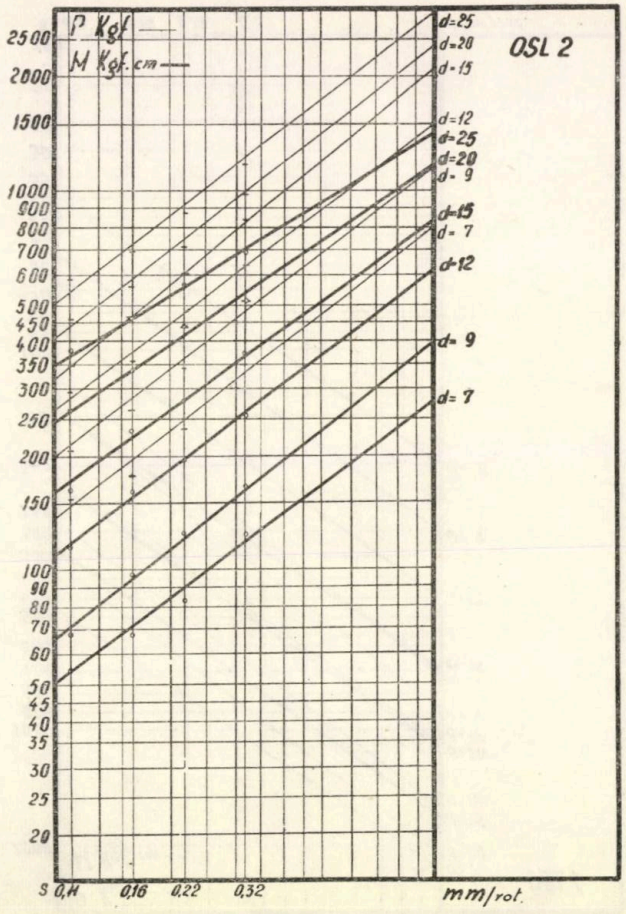

P Kgf
M Kgf.cm
OSL 2
d=25
d=20
d=15
d=12
d=25
d=20
d= 9
d=15
d= 7
d=12
d= 9
d= 7
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
S 0,11
0,16
0,22
0,32
mm/rot.

Fig. 3

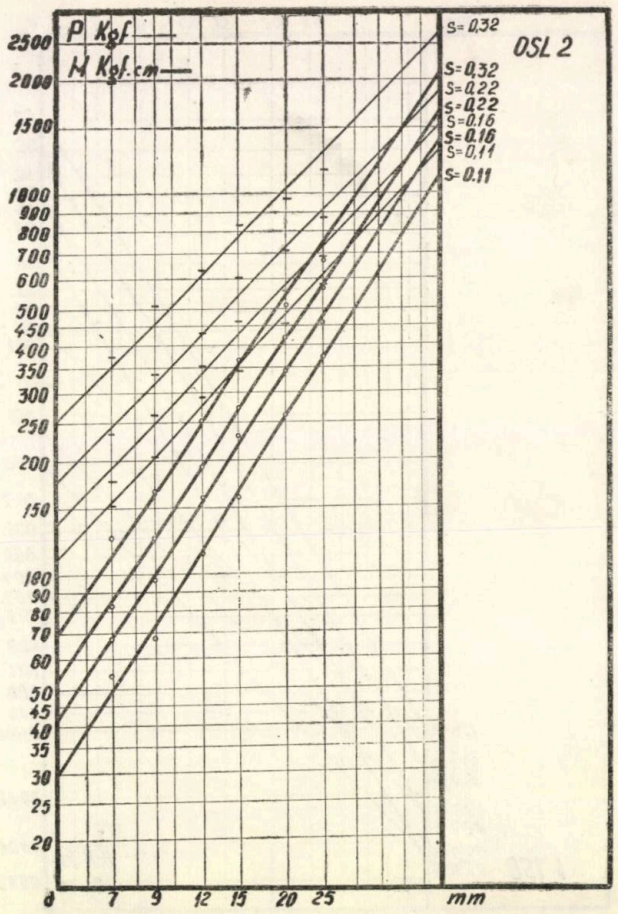

P Kgf
M Kgf.cm
OSL 2
S=0,32
S=0,32
S=0,22
S=0,22
S=0,16
S=0,16
S=0,11
S=0,11
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
d
7
9
12
15
20
25
mm

Fig. 4

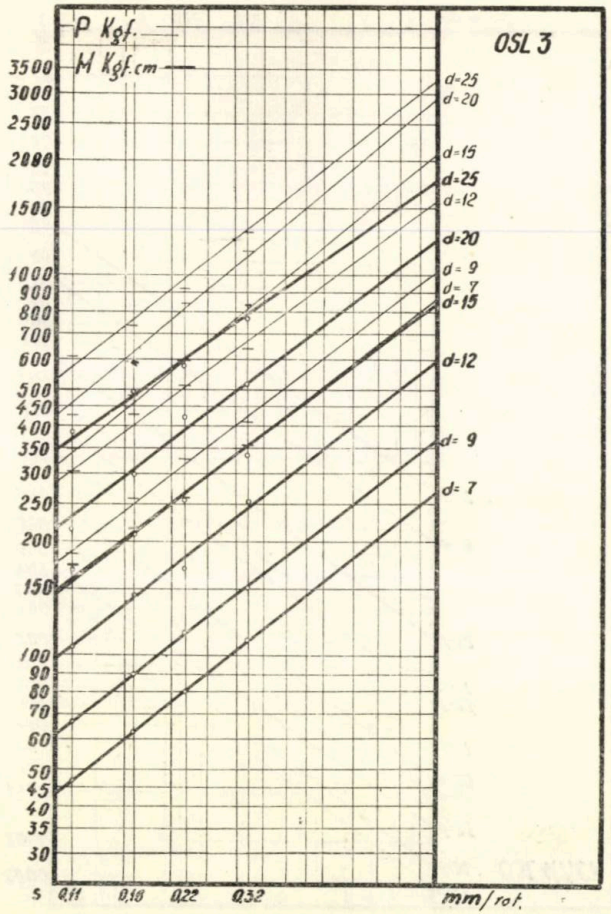

P Kgf.
M Kgf.cm
OSL 3
3500
3000
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
d=25
d=20
d=15
d=25
d=12
d=20
d= 9
d= 7
d=15
d=12
d= 9
d= 7
s 0,11 0,16 0,22 0,32
mm/rot.

Fig. 5

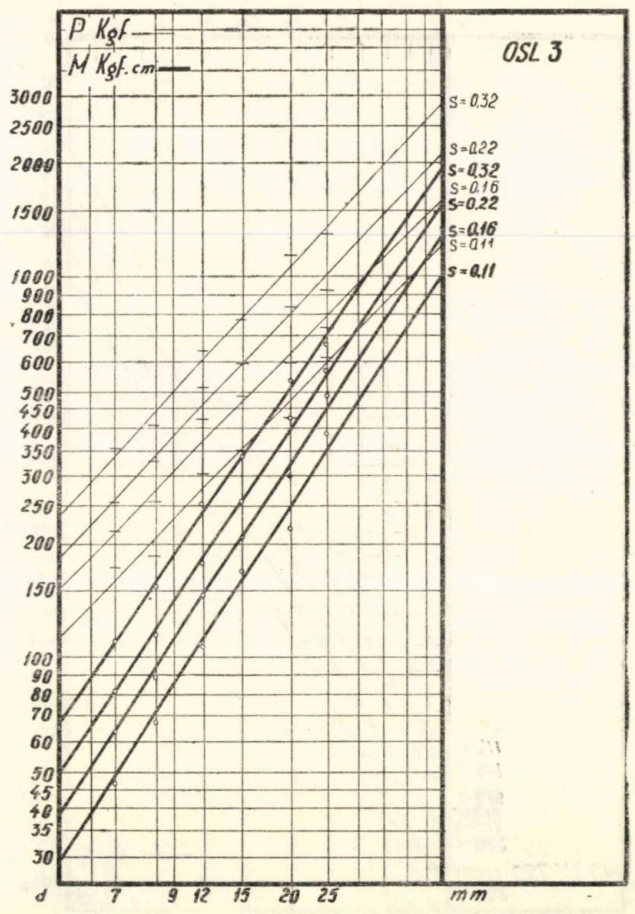

P Kgf
M Kgf.cm
OSL 3
3000
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
S=0.32
S=0.22
S=0.32
S=0.16
S=0.22
S=0.16
S=0.11
S=0.11
d 7 9 12 15 20 25
mm

Fig. 6

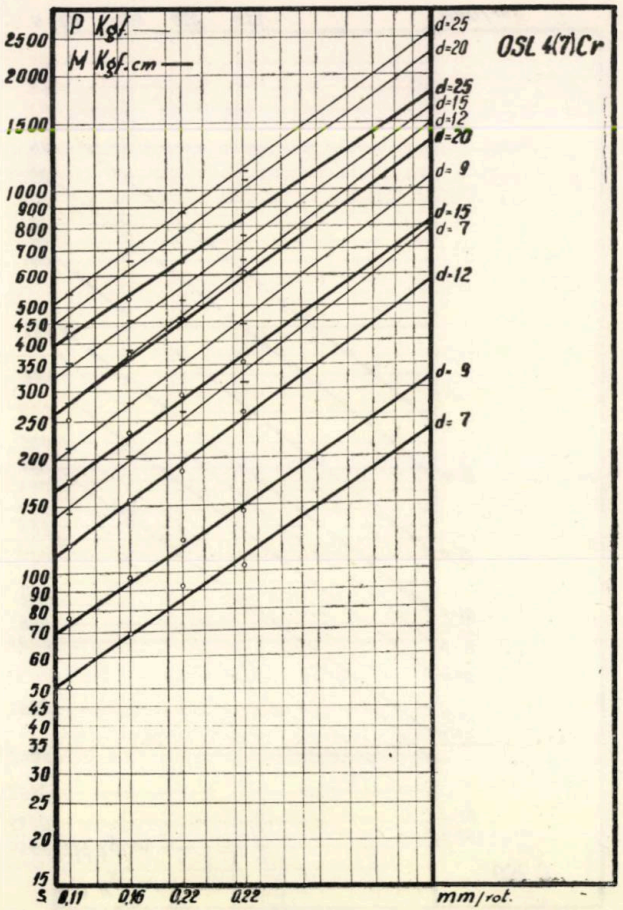

P Kgf.
M Kgf.cm
OSL 4(7)Cr
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
d=25
d=20
d=25
d=15
d=12
d=20
d= 9
d=15
d= 7
d=12
d= 9
d= 7
s 0,11 0,16 0,22 0,22
mm/rot.

Fig. 7

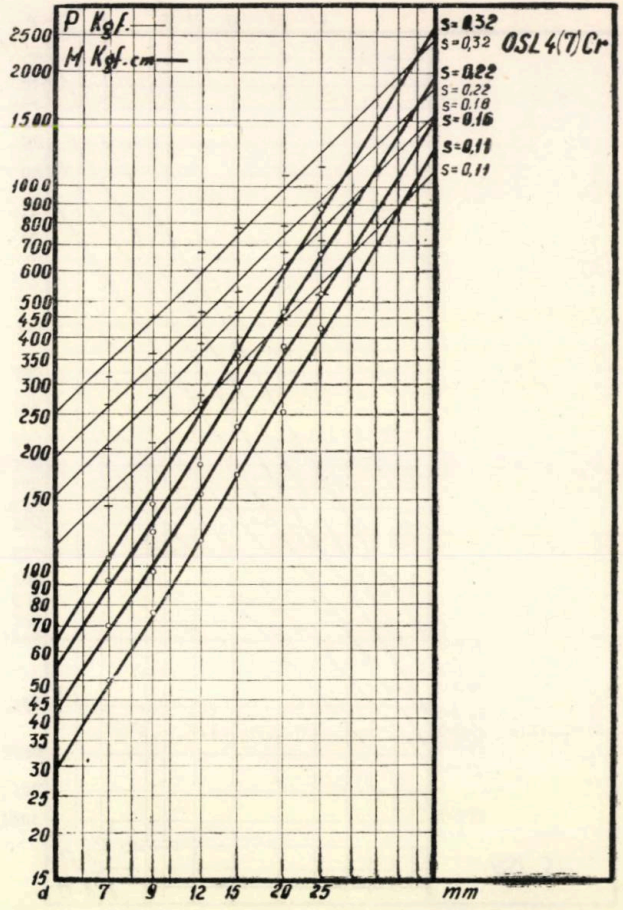

P Kgf.
M Kgf.cm
OSL 4(7)Cr
2500
2000
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
s=0,32
s=0,32
s=0,22
s=0,22
s=0,16
s=0,16
s=0,11
s=0,11
d 7 9 12 15 20 25
mm

Fig. 8